FONDO PIZZOFALCONE

R. ISTITUTO ORIENTALE NAPOLI
BIBLIOTECA M. RIPA
1
A
3

4036
BIBLIOTECA PROVINCIALE

Palchetto
Num.° d' ordine 10

1-A-3

NAZIONALE
B. Prov.
11
211
NAPOLI
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

R. Crow.
II
271

609250

ELEMENTI
DI
MATEMATICHE
PURE

Secondo il metodo del Chiarissimo Signor Abbate DE LA CAILLE.

EDIZIONE SECONDA ITALIANA

Accresciuta del Trattato della

TRIGONOMETRIA SFERICA

DEL PADRE

RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH.

BIBLIOTECA SCIENTIFICA NAPOLI

IN VENEZIA,
MDCCLXXV.

Presso TOMMASO BETTINELLI.

Con Licenza de' Superiori, e Privilegio

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE NAPOLI

TAVOLA
DELLE MATERIE.

Idea generale delle Matematiche. pag. 1

PARTE PRIMA.

Delle Matematiche Pure. 7

LIBRO PRIMO.

Aritmetica Numerica. ivi
CAP. I. De' Numeri intieri. ivi
Natura, Formazione, e Valore de' Numeri. ivi
Addizione de' Numeri intieri. 13
Sottrazione de' Numeri intieri. 15
Moltiplicazione de' Numeri intieri. 16
Divisione de' Numeri intieri. 19
CAP. II. Delle Frazioni. 24
Riduzione de' Fratti. 25
Addizione de' Fratti. 28
Sottrazione de' Fratti. ivi
Moltiplicazione de' Fratti. 29
Divisione de' Fratti. 32
CAP. III. Delle Frazioni Decimali. 33
Addizione delle Decimali. 35
Sottrazione delle Decimali. 36
Moltiplicazione delle Decimali. ivi
Divisione delle Decimali. 37

BIBLIOTECA PROVINCIALE NAPOLI

LIBRO II.

Dell' Algebra. 39
CAP. I. Dell' Algebra propriamente detta. ivi
Operazioni Algebraiche. 41
Riduzione. ivi
Addizione. ivi
Sottrazione. 42
Moltiplicazione. ivi
Divisione. 44
Della Compofizione, e Risoluzione. 47
Trovar i divisori d' una quantità data. 49
Elevazione delle Quantità alle Potenze. 53
Estrazione delle Radici. 57
Estrazione della Radice Quadrata. 59
Estrazione della Radice Cubica. 63
Degl' Incommensurabili. 68
Calcolo de' Radicali. ivi
Calcolo delle Potenze per i loro Esponenti. 76
Riflessioni sull' oggetto ed essenza dell' Algebra. 78
CAP. II. Dell' Analisi. 83
Dell' Equazione. ivi
Trasposizione. 84
Divisione. 85
Moltiplicazione. ivi
Estrazione della Radice. 86
Sostituzione. ivi
Proporzione. 87
Risoluzione dei Problemi. ivi
Equazione del primo grado. 88
Equazione del secondo grado. 97
Delle Quantità negative. 109
Problemi del secondo grado. 110
Dell' Equazioni di differenti gradi. 114
Equazioni del terzo grado. 116
Caso irreduttibile. 121
Equazioni del quarto grado. 123
Riflessioni. 126
CAP. III.

CAP. III. Delle Proporzioni. 129
Proprietà delle Ragioni e Proporzioni Aritmetiche. 131
Progreſſione Aritmetica. 132
Problemi ſulle Progreſſioni Aritmetiche. 138
Delle Ragioni e Proporzioni Geometriche. 140
Proprietà delle Proporzioni Geometriche. 143
Problemi ſulle Proporzioni Geometriche. 144
Delle Progreſſioni Geometriche. 148
Problemi ſulla Progreſſione Geometrica. 151
CAP. IV. De' Logaritmi. 157
Proporzione Armonica. 167
CAP. V. Proprietà della Grandezza conſiderata nell' infinito. 169
CAP. VI. Delle Serie. 175
Somma delle Serie. 179
CAP. VII. Della Combinazione. 185
Alternazione o Permutazione. 188

LIBRO III.

Della Geometria Elementare. 191
CAP. I. Delle Linee o della Longimetria. 192
Proprietà delle Linee rette nella poſizione d' una retta riguardo ad un' altra. *ivi*
Proprietà delle linee rette nella poſizione di una riguardo a due o a più altre, ſenza racchiudere ſpazio. 198
Proprietà delle linee rette riguardo al Circolo. 204
Proprietà delle line rette che racchiudono ſpazio. 212
De' Triangoli. *ivi*
Differenti ſpecie e proprietà de' Triangoli. ivi
Comparazione de' Triangoli. 216
Degli altri Poligoni. 219
Proprietà de' Poligoni in generale. ivi
Proprietà de' Poligoni Simetrici. 221
Proprietà de' Poligoni Regolari. 223
Proprietà del Circolo. 226
Delle linee Proporzionali. 231

Com-

Comparazione delle Figure, o proprietà delle Figure simili. 237
CAP. II. De' le Superficie, o della Planimetria. 239
Del contorno della Superficie e della lor comparazione. ivi
Delle misure proprie per determinar la grandezza della Superficie. 240
Metodo generale di misurare la Superficie. 241
Osservazioni sulla Quadratura del Circolo. 250
Delle Figure Isoperimetre. 252
Della Geodesia o Agrimensura. 254
Proprietà delle Superficie Piane o de' Piani. 263
CAP. III. De' Solidi o della Stereometria. 267
Origine e proprietà de' Solidi prodotti da un moto rettilineo. 268
Origine e proprietà de' Solidi formati da un moto circolare. 271
De' Poliedri e de' loro rapporti. 274
Comparazione de' Solidi. 278
Misura delle Superficie di ciascuna specie di Solidi. 281
Comparazione delle Superficie de' Solidi. 285
Misura delle Solidità di ciascuna specie di Solidi. 286
Comparazione delle Solidità dei Solidi. 290

APPENDICE PRIMA.

Della Trigonometria. 291
Principj per la costruzione delle Tavole de' Seni. 295
Principj per la Teoria del Calcolo Trigonometrico. 297
Usi della Teoria precedente per i Calcoli Trigonometrici. 301
Calcoli de' Triangoli Rettangoli. 302
Calcoli de' Triangoli Obbliquangoli. 304
Applicazione della Trigonometria. 306

APPENDICE SECONDA.

Del Compaſſo di Proporzione. 314
Uſo della Linea delle Parti uguali. 315
Uſo della Linea delle Corde. 318
Uſo della Linea de' Poligoni. 319
Uſo delle Linee de' Piani. 320
Uſo della Linea de' Solidi. 321
Uſo della Linea de' Metalli. 322
Uſo della Linea de' Seni, delle Tangenti, e delle Seganti. 323
Uſo del Compaſſo di Proporzione per la Trigonometria. 324
Uſo del Compaſſo di Proporzione nella Geometria. 327
Uſo del Compaſſo di Proporzione nell' Agrimenſura. 328
Oſſervazioni ſulla Geometria. 329
Della Geometria Traſcendente. 332
CAP. I. Delle Curve in generale. ivi
CAP. II. Delle Sezioni Coniche. 341
Della Natura e proprietà delle Sezioni Coniche deſcritte ſopra un piano, e conſiderate rapporto ai loro aſſi. ivi
Proprietà delle Sezioni Coniche riguardo a loro diametri. 364
Proprietà dell' Iperbole riguardo ai ſuoi Aſintoti. 371
Problemi ſopra le Sezioni Coniche. 375
CAP. III. Di varie Curve principali. 388
Concoide di Nicomede. 389
Ciſſoide di Diocle. 391
Curve Meccaniche o Traſcendenti. 392
Quadratrice di Dinoſtrate. ivi
di Tſchirnhauſen. 393
Spirale d' Archimede. ivi
Logaritmica. ivi
Logaritmica Spirale. 394
Cicloide. ivi
Epicicloide. 396

Svilupata . 397
CAP. IV. De' Luoghi Geometrici. 298
CAP. V. Del Calcolo Infinitesimale. 407
CAP. VI. Del Calcolo Differenziale. 412
Uso del Calcolo Differenziale, per trovare le Tangenti, Normali ec. 419
Per trovar i raggi della Curvatura delle Curve. 422
Per i Massimi e i Minimi. 424
CAP. VII. Del Calcolo Integrale. 431
Per le Quadrature delle Superficie Piane e Curve. 433
Per la Rettificazione delle Curve. 436
Per la Cubatura de' Solidi. 438
Per il Metodo inverso delle Tangenti. 439
Trigonometria Sferica. 442

IDEA GENERALE
DELLE
MATEMATICHE.

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI

LA parola *Matematica* significa *Scienza*. Infatti si possono riguardar le *Matematiche* come la *Scienza* per eccellenza; poichè elle racchiudono le sole cognizioni certe accordate ai nostri lumi naturali.

Si chiaman *Matematiche* quelle Scienze, che han per oggetto le proprietà della *Grandezza* in quanto ella è calcolabile o misurabile.

La *Grandezza*, o sia *Quantità*, è tutto ciò che può concepirsi composto di parti; tutto ciò che è suscettibile di accrescimento e di diminuzione.

La *Quantità* si può concepire, o come composta di parti separate le une dall'altre, o come composta di parti unite e legate fra loro. Un mucchio di arena è una quantità composta di parti fra loro separate: un bastone è una grandezza composta di parti unite o continue.

La quantità composta di parti separate si esprime con numeri, ed è l'oggetto dell'*Aritmetica*; allora la quantità è *calcolabile*.

La Quantità, di cui le parti son continue, fa l'*Estensione*, e questo è l'oggetto della *Geometria*; allora la quantità è *misurabile*.

Le Matematiche si dividon in due Classi. La prima Classe abbraccia le *Matematiche Pure*, cioè quelle, ove le proprietà della grandezza calcolabi-

le e misurabile son considerate in una maniera *astratta*, vale a dire senza disegnar un soggetto particolare.

La seconda Classe comprende le *Matematiche Miste*, o *Fisico-Matematiche*, nelle quali si considerano le proprietà della grandezza calcolabile o misurabile in una maniera *concreta*, cioè ne' corpi o soggetti particolari; il che è opposto all' *astratto*. Per esempio, 3, è un numero *astratto*, lorchè non disegna nè tre Uomini, nè tre alberi, nè altra cosa particolare; ma tre alberi è *concreto*.

La *Quantità astratta*, oggetto delle Matematiche Pure, è o *numerabile*, o *estesa*. La *quantità astratta* numerabile è divenuta l'oggetto dell' *Aritmetica*; e la *quantità astratta estesa* quello della *Geometria*.

L' *Aritmetica* si divide in *Aritmetica numerica* o per *Cifre*, ed in *Algebra* o sia *Aritmetica universale per lettere*, la quale non è altro che il calcolo delle grandezze in generale, e di cui le operazioni non sono propriamente che operazioni Aritmetiche in una maniera più compendiosa.

L' *Algebra* è *elementare* o *infinitesimale* secondo la natura delle quantità alle quali si applica. L' *Infinitesimale* è o *Differenziale* o *Integrale*. E' *Differenziale*, quando si tratta di scendere dall' espressione d' una quantità finita, o considerata come tale, all' espressione del suo accrescimento, o della sua diminuzione istantanea. *Integrale*, quando si tratta di rimontare da questa espressione alla stessa quantità finita.

La *Geometria*, o ha per oggetto primitivo le proprietà del circolo e della linea retta, o abbraccia nelle sue speculazioni ogni sorte di curve. Quindi si divide in *Elementare*, in *Trascendente*, ed in *Sublime*.

Le

Le *Matematiche Miſte* han tante diviſioni e ſud diviſioni quanti ſono gli effeti reali, ne' quali la quantità può eſſere conſiderata.

La *quantità* conſiderata ne' corpi mobili, o tendenti a muoverſi, è l' oggetto della *Meccanica*, la qual ha due rami, la *Statica*, e la *Dinamica*.

La *Statica* ha per oggetto la quantità conſiderata ne' corpi in equilibrio, e tendenti ſoltanto a muoverſi. La *Dinamica* ha per oggetto la quantità conſiderata ne' corpi attualmente moſſi.

La *Statica* ſi divide in *Statica propriamente detta*, che ha per oggetto la *quantità* conſiderata ne' corpi ſolidi in equilibrio, e tendenti ſolo a muoverſi; ed in Idroſtatica, che ha per oggetto la quantità conſiderata ne' corpi fluidi, e tendenti ſoltanto a muoverſi.

La *Dinamica* ſi ripartiſce in *Dinamica* propriamente detta, che ha per oggetto la *quantità* conſiderata ne' corpi ſolidi attualmente moſſi; ed in *Idrodinamica*, che ha per oggetto la *quantità* conſiderata ne' corpi fluidi attualmente moſſi.

Ma ſe ſi conſidera la *quantità* nell' *acque* attualmente, l' *Idrodinamica* prende il nome d' *Idraulica*.

Alla *Idrodinamica* ſi riferiſce la *Navigazione*, ed alla *Meccanica* la *Baliſtica* o ſia il getto delle Bombe.

La *quantità* conſiderata nel movimento de' corpi Celeſti dà l' *Aſtronomia Geometrica*; donde la *Coſmografia* o *Deſcrizione dell' Univerſo*, la quale ſi divide in *Uranografia* o *Deſcrizione del Cielo*, in *Idrografia* o *deſcrizione dell' acque*, ed in *Geografia*. Quindi ancora deriva la *Cronologia*, e la *Gnomonica* o l' arte di coſtruir i *quadranti*.

La *quantità* conſiderata nella Luce è l' oggetto dell' Ottica. Dalla *quantità* conſiderata nel movimento della luce naſcon i differenti rami dell' *Ot-*

tica. La luce moſſa in linea retta è l' oggetto dell' *Ottica* propriamente detta ; la luce rifleſſa in un ſolo e ſteſſo mezzo lo è della *Catotrica* ; la luce rotta nel paſſare da un mezzo in un altro diverſo, forma l'oggetto della *Diottrica*. All' *Ottica* ſi riferiſce la *Proſpettiva*.

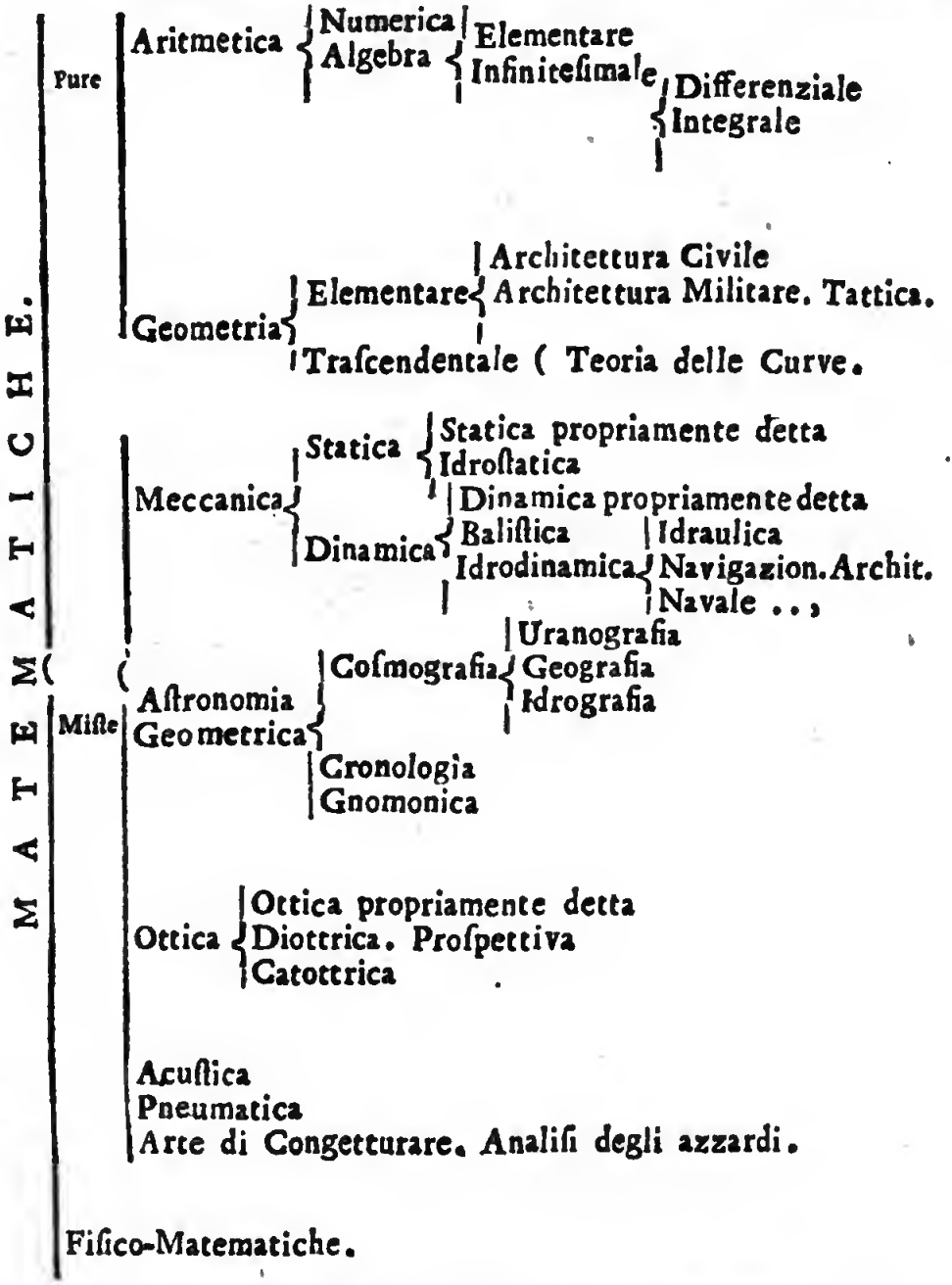
La *quantità* conſiderata nel Suono, nella ſua veemenza, movimento, gradi, rifleſſioni, velocità ec. dà l' *Acuſtica*.

La *quantità* conſiderata nell'Aria, nel ſuo peſo, movimento, condenſazione, rarefazione ec. dà la *Pneumatica*.

La *quantità* conſiderata nella poſſibilità degli avvenimenti, ſomminiſtra l' *Arte di Congetturare*, donde naſce l' *Analiſi de' Giuochi d' azzardo*.

Ecco per maggior chiarezza una Tavola di tutta la diviſione delle *Matematiche*.

MA-



Da ciò si vede, che le Matematiche si estendono sopra

quasi tutte le cognizioni umane. Illuminan lo spirito a distinguer il vero dal falso, lo convincono delle verità già note, e l' ajutano a portare con un' intiera certezza la perfezione in tutte le Scienze che l' uomo può acquistare colla sola sua ragione.

PAR-

PARTE PRIMA

DELLE MATEMATICHE PURE.

LIBRO PRIMO.

Aritmetica Numerica.

CAPITOLO PRIMO.

De' Numeri interi.

Natura, Formazione e Valore de' Numeri.

1. L'*Aritmetica Numerica* è una scienza, che considera le proprietà de' *Numeri*; per apprender a calcolar esattamente con facilità e prontezza.

2. I *Numeri* son disegnati presentemente in una gran parte della Terra; almen in Europa, in *dieci figure*, le quali dagl' Indiani passaron agli Arabi, e indi verso il fine del decimo secolo per mezzo di Gerberto, che fui poi Pa-

pa Silveſtro II, furon a noi comunicate. Queſte *dieci figure* ſono

Uno.	1	Sei.	6
Due.	2	Sette.	7
Tre.	3	Otto.	8
Quattro.	4	Nove.	9
Cinque.	5	Zero.	0

Invenzione che per la ſua grand' utilità, fa grand' onore allo ſpirito umano. E' mirabile come con sì poche figure ſi eſprimi ogni ſorte di numeri. Ma il più mirabile è l'idea concepita in queſtainvenzione, in variar il valore d' una figura col metterla in differenti luoghi, e d'inventar il zero, il quale trovandoſi dopo una figura ne accreſce il valore d' una decina.

Dieci.	10	Venti.	20
Undici.	11	Cinquanta.	50
Dodici.	12	Cento.	100
Vent' uno.	21	Settecento.	700
Duecento trenta quattr.	234	Novecento quattro.	904
Quattrocento venti tre.	423	Mille.	1000
Trecento venti.	320	Mille ed uno.	1001

3. Da ciò appariſce, che una ſola cifra non eſprime che unità: come 8 eſprime otto unità. Ma quando ſon più cifre ordinate di ſeguito in una ſteſſa linea, eſprimono differenti valori ſecondo il rango che occupano. Queſti ranghi ſi contano da deſtra a ſiniſtra, e ciaſcuna cifra eſprime decine riguardo a quella che l' è a deſtra.

Per enunciar il valore di queſto numero .... 4579. ſi offervi che la figura 9 (che è la prima incominciando a deſtra) è un numero ſemplice di nove unità; la figura 7 ſuſſeguente eſprime ſette decine o ſettanta; la ſuſſeguente 5 eſprime centinaja o ſia cinquecento; finalmente l'ultima 4 eſprime quattro mila.

Onde

Onde riassumendo tutti questi valori, ma ordine inverso, cioè incominciando a sinistra, si vede che questo numero 4579. significa quatromila cinquecento settantanove.

4. Il zero, quando è preceduto da altra figura, serve per far esprimer alle decine il loro valore; come 10 dieci, 50 cinquanta, 603 seicento e tre. Ma quando è solo, o, non significa nulla.

5. Lorchè son molte figure (cifre o caratteri che dir si vogliano) come 2109208430021694701; per conoscerne ed esprimerne con facilità il valore, si suole ripartirle (incominciando da destra a sinistra) in più classi, ciascuna di tre cifre, separate con virgole.

Le cifre contenute nella prima classe o primo ternario (andando sempre da destra a sinistra) esprimon unità, decine, e centinaja semplici. Nel secondo ternario son unità, decine, e centinaja di migliaja. Il terzo esprime unità, decine, e centinaja di milioni. Il quarto unità, decine, e centinaja di migliaja di milioni. Il quinto unità, decine, centinaja di milioni di milioni; o sia di *bilioni*. Il sesto unità, decine, e centinaja di migliaja di bilioni. Il settimo unità, decine, centinaja di milioni di bilioni, o sien *trilioni*, e così in appresso *quadrilioni*, *quintilioni* ec.

Onde le predette cifre ripartite in questa maniera

3 2 1

2, 109, 208, 430, 021, 694, 701, e mettendo per maggior facilità sopre la settima cifra 1, sopra l'altra settima 2, sulla terza settima 3 ec. si leggon così, due trilioni, cento nove mila duecento otto bilioni, quattrocento trentamila ventuno milione, seicento novanta quattromila settecento uno.

Si legge sempre da sinistra a destra; e la denominazione di un ternario non si fa se non che dopo aver enunciata l' ultima cifra dello stesso ternario. Come per leggere 694, 700, non si dice secentomila, novantamila, quattromila, settecento; ma seicento novantaquattro mila settecento.

6. Gli antichi Romani esprimevan i numeri con queste

queſte ſette cifre, I, V, X, L, C, D, M.

La cifra I ſignifica uno; V, cinque; X, dieci; L, cinquanta; C, cento; D, cinquecento; M, mille.

I, ripetuto due volte fa due, II; tre volte III, tre.

I, poſto avanti a V, o X, leva un' unità dal numero eſpreſso da ciaſcuna di queſte lettere; onde IV, ſignifica 4; IX, 9.

Ma ſe I, ſi aggiunge a V, o ad X, accreſce unità ai numeri ai quali ſi aggiunge. Come VI ſignifica 6; VII, 7; VIII, 8; XI, 11; XII, 12 &c.

Lo ſteſso è rapporto a X, avanti o dietro L, e C.

Onde XL ſignifica 40; LX, 60; LXX, 70; XC, 90; CX, 110.

Più C ſignifica più centinaja, come CC, 200 ec.

Talvolta, ma s' incontra di rado, CD, 400.

Oltre la lettera D eſprimente 500, ſi eſprime lo ſteſso numero in queſta maniera IↃ. Così invece di M, ſignificante mille, ſi fa CIↃ. Onde IↃC, 600; IↃCC, 700 ec. Così CCIↃↃ, ſignifica 10, 000; CCCIↃↃↃ, 100, 000 ec.

Uſavan anche di porre una sbarretta per dinotar le migliaja, come $\overline{V}$, ſignifica 5000; $\overline{LX}$, 60, 000; $\overline{M}$, 1, 000, 000; $\overline{MM}$, 2, 000, 000.

In qual maniera faceſsero i Romani con tali cifre le loro operazioni numeriche, ci è intieramente ignoto. Queſta inutile, e non difficile ſcoperta appartien agli eruditi.

7. Il *Numero*, ſecondo la giuſta definizione di Nevvton, *è un rapporto*, o ſia *una ragione*.

Per ben intender ciò, convien ſapere che *rapporto*, o *ragione non è altro che il riſultato del paragone di due quantità, l' una coll' altra, relativamente alla loro grandezza*. Ogni quantità che ſi paragona ad un' altra, è o maggiore, o minore, o uguale.

Onde ogni grandezza ha un certo rapporto con un' altra con cui ſi paragona; vale a dire ella vi è contenuta, o la contiene in un certo modo.

Que-

Questo modo di contenere o d'esser contenuto, cioè questo *rapporto*, è quel che si chiama *Numero*.

Onde il numero 4 esprime il rapporto d'una grandezza verso un' altra più piccola, che si prende per l' unità, e che è contenuta quattro volte dalla più grande. All'incontro la frazione $\frac{1}{4}$, cioè un quarto, esprime il rapporto d' una certa grandezza verso una più grande che si prende per l' unità, in cui la minore si contiene quattro volte.

8. *Numero intiero sarà dunque quello, che vien misurato dall' unità*, come 1, 2, 3 &c. *Numero fratto, o rotto, è quello ch' è parte dell' unità*.

Non vi è unità, che non si possi concepir composta d' un certo numero di parti uguali fra loro. Una tesa o pertica, per esempio, è composta di 6 parti, cioè di 6 piedi; un piede è composto di 12 pollici; un pollice di 12 linee, una linea di 12 punti ec.

Dunque lorchè si dice $\frac{2}{3}$ o $\frac{2}{3}$ di tesa, s'intende dire che d'una tesa si prendono 2, o 3 parti.

9. Il rapporto è di due specie. Si dice *Geometrico*, lorchè si considera come una quantità ne contenga un' altra; e si chiama *Aritmetico*, quando si considera *l' eccesso*, o la *differenza* d'una quantità verso l' altra. *L'uguaglianza di due rapporti geometrici* dicesi *proporzione geometrica*; e *l' uguaglianza di due rapporti aritmetici* si dice *proporzione aritmetica*. Onde per aver una proporzione, richiedonsi quattro quantità, in maniera che la prima sia alla seconda, come la terza è alla quarta.

Così queste quantità scritte in questa guisa 10:5::4:2 forman una proporzione Geometrica; e quest' altre 8.6:4.2 forman una proporzione Aritmetica.

10. Or se i numeri son rapporti, l' Aritmetica, ch' è la scienza de' numeri, *è dunque l' arte di combinar fra loro questi rapporti*, servendosi per questa combinazione de' segni stessi, co' quali i numeri son distinti.

Quindi nascono le quattro principali operazioni dell' Aritmetica, perchè le differenti combinazioni che si possono fare de' rapporti si riducono o ad esaminare l' eccess-

eccesso degl'uni sugli altri, o la maniera come si contengono. L'*Addizione* e la *Sottrazione* adempion il primo oggetto, *la Moltiplicazione* e *Divisione* il secondo.

11. L'*Addizione* consiste a trovar la *somma* o il *totale* di tutti i numeri che si uniscon insieme: 3, e 6, uniti insieme fan la *somma* 9.

La *Sottrazione* è levar un numero da un altro. Se da 5 si leva 3, il *resto* è 2.

Quantunque i numeri sien propriamente rapporti Geometrici, pure nell' Addizione e Sottrazione si considera l' eccesso scambievole de' numeri, cioè il rapporto Aritmetico. Nell' Addizione uno de' due numeri rappresenta l' eccesso della somma sopra l'altro numero. Nella Sottrazione si cerca la differenza de' due numeri.

12. La *Moltiplicazione* consiste in trovare quante volte un numero contien un altro. Avendosi 4 da moltiplicare per 5, ed il *prodotto* essendo 20, si vede che 20 contiene 4 cinque volte, ovvero contiene 5 quattro volte.

La *Divisione* consiste in conoscere quante volte un numero si contien in un altro. Volendosi 20 divider per 4, il *quoziente* 5 fa vedere, che 4 si contiene in 20 cinque volte.

Dunque nella Moltiplicazione e Divisione si considerano i numeri nel rapporto Geometrico.

13. Da tutto ciò si deduce, che tutte le operazioni dell' Aritmetica riduconsi, o a formar un tutto per mezzo della riunione di differenti parti, come nell' Addizione e nella Moltiplicazione; o a risolver un tutto in differenti parti, il che si fa colla Sottrazione, e colla Divisione.

14. Si deduce ancora, che queste quattro operazioni dell' Aritmetica si riducon rigorosamente a due, all'*Addizione* ed alla *Sottrazione*. Poichè la *Moltiplicazione* non è propriamente che una maniera abbreviata di far l' *addizione* d' un medesimo numero più volte a se stesso; e la *Divisione* è parimenti una manie-

maniera abbreviata di ſottrarre uno ſteſſo numero ad un' altro. Onde ben accuratamente furon le Regole dell' Aritmetica definite da Nevvton *Compoſizione* e *Riſoluzione de' Numeri*.

15. Il dettaglio delle operazioni particolari dell' Aritmetica dipende dalla forma e dalla iſtituzione de' ſegni, co' quali ſi eſprimon i numeri. La noſtra Aritmetica, che non ha che dieci cifre, ſarebbe differentiſſima, ſe ne aveſſe più o meno: ed i Romani che avean cifre diverſe, dovean anche avere operazioni di Aritmetica ben diverſe dalle noſtre. Ma qualunque Aritmetica ſi ridurrà ſempre alle quattro regole ſuriferite; perchè di qualunque maniera ſi diſegnino o ſcrivan i rapporti, non ſi potranno giammai combinarli, che nelle quattro predette maniere, ed a queſte ſi riducono tutte l'altre operazioni dell' Aritmetica.

Addizione de' Numeri intieri.

16. L' Addizione de' numeri *ſemplici*, cioè d' una ſola cifra, non ha biſogno d' alcuna regola.

Si ſa ſubito, che 4 aggiunto a 3, fa 7. Per brevità ſi ſegna così, $4 + 3 = 7$. Il ſegno $+$ ſignifica più, ed il ſegno $=$ ſignifica uguale.

17. Ne' numeri compoſti di più cifre, l'addizione ſi eſeguiſce col porre i numeri in colonne verticali; badando però di metter le unità ſotto le unità, le decine ſotto le decine ec. Si tira indi una linea o sbarra orizzontale. Poi s' incomincia a ſommare tutte le unità (andando ſempre da deſtra a ſiniſtra) di una colonna, poi le decine dell'altra ec.; e ſi ſcrivono queſte ſomme ſotto la sbarra ſucceſſivamente alle colonne corriſpondenti. Come per ſommare queſte due quantità.

643
236

La Somma è. 879

Perchè la ſomma delle unità della prima colonna eſſendo $3 + 6 = 9$, ſi mette 9 ſotto la prima colonna.

na. La ſomma de le decine della ſeconda colonna eſſendo $4 + 3 = 7$, ſi ſcrive 7 ſotto la ſeconda colonna; e la ſomma delle centinaja della terza colonna eſſendo $6 + 2 = 8$, ſi mette 8 ſotto la terza colonna. Onde la ſomma totale è 879.

18. Ma ſe la ſomma di una delle colonne ſorpaſſa 9, cioè ſe è compoſta di decine ed unità, conviene ſcriver ſolamente le unità ſotto di eſſa colonna ed aggiunger alla colonna ſuſſeguente un numero ugual a quello delle decine trovate nella precedente ſomma. Come.

28
94
Somma. 122

$8 + 4 = 12$; poichè 12 contiene una decina e due unità, ſi metta 2 ſotto la prima colonna, e ſi aggiunga una decina alla ſomma della colonna ſuſſeguente, la quale farà $1 + 2 + 9 = 12$. Così.

3946
215
1031
21
204
Somma. 5417

Queſta regola non ha biſogno di dimoſtrazione: ad ognuno è noto, che il tutto è uguale a tutte le ſue parti, preſe inſieme.

Per accertarſi di non aver errato, ſi rifaccia l'operazione, prendendo la ſomma delle colonne da giù in ſu, poichè dovrà eſſer la ſteſſa di quella preſa da ſu in giù.

19. Come ſi è fatta l'addizione de' numeri *omogenei* cioè della ſteſſa ſpecie, così ſi fa ancora l'addizione de' numeri *eterogenei*, vale a dire di ſpecie diverſa.

Convien però ne' numeri eterogenei uſar due attenzioni: una di porre i numeri della ſteſſa denominazione gli uni ſotto gl' altri, come avendoſi a ſommare ſcudi, paoli, bajocchi, con altri ſcudi paoli, e bajocchi, biſogna porre gli ſcudi ſotto gli ſcudi, i paoli

ſotto

sotto i paoli, i bajocchi sotto i bajocchi ec. L' altra attenzione è, che nella somma di ciascuna colonna convien osservare quante volte si contiene la specie della colonna susseguente, ed aggiungerla a tal colonna, mettendo il resto sotto la prima.

Come nel sottoposto esempio; poichè 17 linee contengon un pollice e 5 linee, il numero 5 devesi porre sotto la colonna delle linee, e quel pollice aggiungerlo alla colonna de' pollici; e poichè 20 pollici contengon 1 piede ed 8 pollici, si porrà 8 sotto la colonna de' pollici, e si aggiungerà 1 a quella de' piedi, la di cui somma essendo 12, cioè 2 tese, si porrà o sotto la colonna de' piedi, e si porterà 2 in quella delle tese.

tese,	piè,	pollici,	linee
26,	4,	10.	11
3,	7,	9,	6
31,	0,	58	5

Sottrazione de' Numeri Intieri.

20. E' facile la Sottrazione de' Numeri semplici. Se da 6 si ha da toglier 4, sarà 2 il *resto*, che si può anche chiamar *eccesso* o *differenza*. Questa operazione per brevità si esprime così, $6 - 4 = 2$: il segno — significa meno.

21. Per sottrarre i numeri composti, convien porre il più piccolo sotto il più grande, e le unità sempre sotto le unità, le decine sotto le decine ec. Indi tratta una sbarra, scrivasi sotto ciascuna colonna successivamente la *differenza* che passa tralle unità, decine ec. del numero superiore e quelle del numero inferiore $5-2=3$, $7-3=4$, $6-4=2$.

675
432
Resto. 243

22. Ma se in una colonna la cifra inferiore sorpassa la superiore, bisogna aggiunger alla superiore una decina, e far la solita sottrazione; ma per compensare questa decina, bisogna o diminuire d' un' unità la cifra superiore della colonna susseguente, o accrescer d' una

d'una unità la cifra inferiore della ſteſsa colonna ſuſſeguente. Come nel ſottopoſto eſempio. 7650
1561

Reſto. 6089

Per i numeri eterogenei, nel caſo che il numero inferiore ſia più grande del ſuperiore, biſogna aggiunger invece di decine il valor di una unità della ſpecia ſuſseguente. Come per ſottrarre 7 linee da 3 linee, a 3 non convien aggiunger 10, ma 12 linee, che è il valore di un pollice ec.

	teſe,	piè,	poll.,	linee
	15,	5,	4,	3
	7,	6,	10,	7
Reſto.	7,	4,	5,	8

23. Per prova della giuſtezza della ſottrazione, ſi aggiunga inſieme il reſto ed il minor numero ſottratto, la ſomma deve eſser ugual al numero maggiore.

	2141	
	1742	
Reſto.	399	
Numero minore.	1742	
Numero maggiore.	2141	Somma.

Moltiplicazione de' Numeri Intieri.

24. La Moltiplicazione ſerve per trovare nella maniera più breve la ſomma d'un numero, che ſi ha da aggiunger molte volte a ſe ſteſso. Moltiplicar 8 per 9, altro non ſignifica, che ſaper la ſomma di 8 aggiunto nove volte. Si avrebbe perciò da far una colonna di nove 8, per aver la ſomma di 72. Or per evitar queſta lunga ripetizione di addizione, ſi è trovata una maniera più ſpedita, ch' è la Moltiplicazione.

25. Per moltiplicar i numeri ſemplici non vi è regola, baſta ſaper la volgariſſima tavola Pitagorica, o

far

far uſo delle dita. E' chiaro, che 4 moltiplicato per 6 fa 24; il che ſi eſprime in compendio $4 \times 6 = 24$; il ſegno $\times$ ſignifica *moltiplicato per*.

De' due numeri che ſi moltiplican inſieme, uno ſi chiama *moltiplicatore*, l'altro *moltiplicando*, ovvero *radici*, e *fattori* del *prodotto* che è il riſultato della moltiplicazione.

26. Nella moltiplicazione de' numeri compoſti, convien mettere quello che ſi è ſcelto per *moltiplicatore* (che è ordinariamente il più piccolo) ſotto il *moltiplicando*; in maniera però che ſempre le unità ſien ſotto le unità, le decine ſotto le decine ec. E tratta una linea, incominciar da deſtra a ſiniſtra a moltiplicar ciaſcuna colonna, ritenendo però le decine, e ſcrivendo ſotto al *moltiplicatore* il numero che reſta dalle decine.

Le decine poi ritenute convien aggiungerle al numero ſuſſeguente. Come $8 \times 4 = 32$, ſi mette giù 2, e ſi portan tre decine.

$3 \times 4 + 3 = 15$, ſi mette giù 5, e ſi porta 1.

Moltiplicando	438
Moltiplicatore	24
	1752
	876
	10512

$4 \times 4 + 1 = 17$, ſi mette giù 7, e ſi porta 1. Ecco che $438 \times 4 = 1752$.

Reſta ora 438×2; il che ſi fa nella ſteſſa maniera

$8 \times 2 = 16$, ſi mette giù 6, e ſi porta 1.

$3 \times 2 + 1 = 7$, ſi mette giù 7.

$4 \times 2 = 8$, ſi mette giù 8.

Onde $438 \times 2 = 876$.

Finalmente ſi ſommano queſti due *prodotti* nella maniera come ſon diſpoſti, e la ſomma 10512, ſarà il *prodotto* di 438×24.

27. Se vi ſono de zeri al fine dell'uno o de' due numeri da moltiplicarſi, ſi abbrevia molto l'operazione, ſe ſi moltiplican ſolamente le cifre, ed al fin del pro-

dotto si mettan tanti zeri, quanti ve ne sono all'estremità de' numeri dati.

		3000
		200
	76013	
	40100	60000
2460		
300	7601300	
	0000	
738000	304052	
	3048121300	

28. La prova della moltiplicazione è di cambiar l'ordine de' numeri dati, cioè del moltiplicatore farne il moltiplicando, e reciprocamente: il *prodotto* dovrà sempre esser lo stesso.

29. La moltiplicazione tra numeri *concreti* propriamente non si dà. *45 operai han fattociascuno 20 tese di opera, qual è il prodotto totale?* Il senso comune dice subito, che bisogna moltiplicare 45 per 20; ma è strano che le tese si abbian da moltiplicare per gli operai. Effettivamente ciò non può essere.

La moltiplicazione consiste in prender una data quantità un dato numero di volte; onde il moltiplicatore deve esser sempre un numero *astratto*. Perciò quando si propone di moltiplicare 20 tese per 45 operai, è lo stesso che dire, si prendan 20 tese 45 volte.

30. La moltiplicazione *composta* è quando si han da moltiplicar quantità di differente specie. Come piè, poll.

	5, 3
	2, 4
	10, 6
	1, 8
	1
Prodotto.	12, 3

1°. Si moltiplichi i piedi per i piedi, cioè $5 \times 2 = 10$, e si metta 10, sotto la colonna de' piedi.

2°. Piedi

2°. Piedi per i pollici, cioè 2 × 3 = 6, e si metta 6 sotto la colonna de' pollici.

3°. 5 × 4 = 20, pollici, cioè 1 piè, e 8 pollici; si metta dunque 1 piè sotto i piedi, e 8 poll. sotto i poll.

4°. 3 × 4 = 12, parti di piede, cioè 1 poll. si metta dunque 1 sotto la colonna de' poll.

La somma 12 piedi 3 poll. sarà il *prodotto*.

Questa operazione si farà ancora più comodamente per mezzo di Frazioni.

Divisione de' Numeri Intieri.

31. La *Divisione* è una sottrazione abbreviata, togliendo un minor numero da un altro maggiore quante volte si può; affin di sapere quante volte vi è contenuto.

Onde per sapere quante volte 2, si contien in 8, la maniera più naturale è sottrarre 2 da 8, il resto è 6; da 6 poi sottrarre 2, il resto è 4; e da 4 sottrarre 2, il resto è 2; finalmente da 2 sottraendo 2, il resto è 6. Or essendosi fatte quattro sottrazioni, si deve conchiudere, che 2 si contenga in 8 quattro volte.

Ma siccome questo metodo sarebbe troppo lungo, se i numeri fossero alquanto grandi, si è perciò trovato un metodo più compendioso, che è la *Divisione*.

32. Nella Divisione si considerano tre numeri. 1°. Quello che si ha da dividere si dice il *dividendo*. 2°. Quello per cui si divide, è il *divisore*. 3°. Quello ch' esprime quante volte il *divisore* è contenuto nel *dividendo*, si chiama il *quoziente*. Come nell' addotto esempio 8 è il *dividendo*, 2 il *divisore*, 4 il *quoziente*.

33. Quindi segue, che il *dividendo* contiene tante volte il *divisore*, quante unità sono nel *quoziente*, come 8 : 2 :: 4 : 1, Onde il prodotto del divisore per il

quoziente è ugual al dividendo, $2 \times 4 = 8$. Dunque la prova dell'esattezza della *divisione* è moltiplicar il divisore per il *quoziente*; il loro prodotto deve esser ugual al *dividendo*.

34. Per divider i numeri semplici, non vi è bisogno di regola.

E' visibile che $\frac{8}{2} = 4$. Il segno della divisione è porre il dividendo sopra il divisore con una linea fra mezzo, altri scrivon così $8 : 2 = 4$.

35. Ma se si tratta di numeri composti, come se si ha da divider 6759 per 3, si dispongan i termini come si veggono nell'operazione.

dividendo	3 divisore
6759	
....	2253 quoziente
6	
. 7	
6	
15	
15	
.. 9	
9	
9.	

Indi si metta un punto sotto la prima cifra 6 del *dividendo*, e veggasi quante volte 3 entra in 6. Vi entra 2 volte; si metta dunque 2 sotto la linea del *divisore*. Per vedere se 3 si contiene realmente 2 volte in 6, si moltiplichi 3 per 2, ed il prodotto 6 si scriva sotto il 6 del *dividendo*; si sottragga; non resta niente; dunque 3 si contien in 6 esattamente 2 volte.

Si metta poscia un altro punto sotto la cifra 7 del *dividendo*, e dicasi 3 in 7 quante volte entra? 2. Scrivasi dunque 2 al *quoziente*. Si moltiplichi poi questo *quoziente* 2 per il divisore 3, il prodotto è 6. Si sottragga questo 6 da 7 del *dividendo*, resta 1.

A fianco

A fianco a questo 1 si cali giù il 5 del *dividendo* col porgli prima il suo punto sotto; e dicasi 3 in 15 quante volte entra ? 5. Dunque si metta 5 nel quoziente. Indi il *quoziente* 5 × 3 divisore, ed il prodotto 15 si sottragga dal *dividendo* 15, e non vi è alcun resto.

Finalmente si metta un punto sotto il 9 del *dividendo*, si cali giù detto 9, e veggasi quante volte il *divisore* 3 vi entra ? 3 volte. Si metta 3 al *quoziente*.

Poi il *quoziente* 3 × 3 divisore, e sottraendo il prodotto 9 dal *dividendo* 9, non resta nulla: l' operazione è compita, tutte le cifre del *dividendo* sono state divise per il *divisore*; dunque il *quoziente* è 2253; cioè il *divisore* 3 è contenuto 2253 nel *dividendo* 6759.

Infatti per vedere, se l' operazione sia esatta, si moltiplichi il *divisore* per il *quoziente*, il prodotto deve esser ugual al *dividendo*. La moltiplicazione è dunque la prova della divisione.

36. Lorchè il divisore contiene più cifre, la divisione è più difficile, e vi si va a tastone, ma anche questo tastone ha le sue regole.

dividendo	
32035	469 divisore
2814..	
3895	68 143 quoziente
3752	469
143	

Poichè le tre prime cifre del *dividendo* non contengon il *divisore*, bisogna prenderne quattro, e metter sotto la quarta cifra 3 il solito punto. Indi si dica 4 prima cifra del divisore quante volte entra in 32, prime due cifre del dividendo ? 8. Ma non si metta però 8 nel *quoziente*, perchè moltiplicandosi prima per il *divisore*, si vedrà che il prodotto 3752 è maggiore di 3203, onde il divisore 469 non è com-

preſo 8 volte nel primo membro del *dividendo* 3203.

Suppongaſi che vi ſia contenuto 7 volte; ma non ſi metta ancora 7 nel *quoziente*, poichè per la ſteſſa ragione $7 \times 469 = 3283 > 3203$, (queſto ſegno $>$ ſignifica maggiore, e queſto $<$ minore.)

Si moltiplichi dunque il *diviſore* 469 per 6, e poichè il prodotto è $2814 < 3203$, ſi ſottragga, il reſto ſarà 389. Si metta dunque 6 nel *quoziente*.

A canto al reſto 389 ſi cali giù la cifra 5 del *dividendo*, e ſi avrà 3895, in cui ſi deve vedere quante volte entra il *diviſore* 469. A queſto effetto ſi deve oſſervare quante volte la prima cifra 4 del *diviſore* entra nelle due prime cifre 38 del *dividendo* (e ciò dovrà generalmente oſſervarſi ſempre che un membro della diviſione ha una cifra di più del *diviſore*) 4 in 38 entra 9 volte, ma non ſi porrà già 9 nel *quoziente* per le ragioni addotte di ſopra, ma ſi porrà 8; perchè $8 \times 469 = 3752$, che ſottraendoſi dal *dividendo* 3895, il reſto è 143, che non è più diviſibile per 469.

Dunque il diviſore 469 ſi contiene 68 volte nel *dividendo* 32035, e reſta 143, che è quel che ſi chiama una *frazione*, mettendovi ſotto il diviſore con una linea fra mezzo.

Se ſi voleſſe proſeguir queſta diviſione, nel caſo che queſti 143 ſignificaſſero, per eſempio, ſcudi; ſi poſſon ridurre in paoli, moltiplicando per 10, onde il prodotto ſarebbe 1430, da dividerſi per 469.

Il *quoziente* ſarebbe 3, e reſterebbe ancora 23 da dividerſi per 469. Queſti 23 paoli riducendoſi a bajocchi, faranno 230 bajocchi; ma ſiccome il *diviſore* 469 non entra alcuna volta in 230, ſi porrà zero nel *quoziente* a canto a 3. I 230 bajocchi riducendoſi a quattrini, cioè $230 \times 5 = 1150$, in cui il *diviſore* 469 entra 2 volte, e ſi porrà 2 al quoziente, e reſteranno 212 quattrini, che non ſono più nè riduttibili, nè diviſibili.

37. Da tutte queſte operazioni ſi deduce. 1°. Che per far la *diviſione* biſogna da principio prender tante

te cifre nel *dividendo* quante ve ne ſono nel *diviſore*.

Ma ſe ſi vede, che le cifre del *diviſore* non ſon compreſe in quelle d' ugual numero del *dividendo*, allora ſi aumenterà d'una cifra il primo membro della *diviſione*: ed in queſto caſo ſi cercherà quante volte la prima cifra del *diviſore* è contenuta nelle due prime cifre del membro da dividerſi; ſi ſcriverà queſto numero nel *quoziente* dopo aver provato che non ſia troppo grande.

2°. Determinato il primo membro della *diviſione*, che produce già una cifra nel *quoziente*, è chiaro che ciaſcuna dell' altre cifre del *dividendo* deve dare una cifra nel *quoziente*. Onde fin dal principio dell' operazione ſi ſa quante cifre deve aver il *quoziente*.

3°. Compita l'operazione ſul primo membro, ſe dopo aver calata una cifra ſi ſcorge, che il *diviſore* non ſi contiene alcuna volta intiero nel nuovo membro del *dividendo*, ſi porrà zero nel *quoziente*, e ſi calerà giù un' altra cifra. E ſe accadeſſe, che il *diviſore* nemmeno ſi conteneſſe intiero in queſto membro così accreſciuto, ſi metta ancora zero nel *quoziente*, e così in appreſſo finchè il *diviſore* foſſe finalmente compreſo nel membro ſu cui ſi opera.

4°. Non ſi deve mai metter nel *quoziente* un numero maggiore di 9.

5°. Se dopo aver fatta la ſottrazione ſi trovaſſe un reſto ugual o maggiore del *diviſore*, ſarebbe ſegno che il numero poſto nel *quoziente* è troppo grande. Onde affinchè una cifra poſta nel *quoziente* ſia legittima, biſogna che il prodotto di queſta cifra per il *diviſore* non ſia maggiore del membro diviſo, nè che dopo la ſottrazione vi ſia un reſto ugual o maggiore del *diviſore*. Nel primo caſo convien diminuire la cifra del *quoziente*, nel ſecondo aumentarla.

38. Quando il *diviſore* è terminato da zeri, ſi abbrevia la diviſione ſeparando al fine del *dividendo* tante cifre quanti zeri ſono al fine del *diviſore*. Si divi-

don poi l' altre per le ſole cifre del *diviſore*, e ſi avrà il *quoziente*.

Se vi è reſto, ſi mette a ſiniſtra delle cifre ſeparate, e ſe ne farà una frazione.

Avendoſi, per eſempio, 238873 da divider per 3600, ſi opererà così.

dividendo		36 diviſore
2388		
	66	1273 quoziente.

3600

39. Se il *dividendo* ed il *diviſore* ſon terminati da zeri, ſi cancelli ugual numero di zeri dall' uno e dall' altro, e ci ſi faccia il reſto della diviſione ſecondo le regole preſcritte. Come 417000: 2500.

dividendo		25 diviſore
417		
		20
	166	— quoziente

25

40. Se ſi ha da dividere più quantità di diverſa ſpecie per altre quantità di diverſa ſpecie; come ſe ſi aveſſe da divider 2 teſe e 4 piedi per 4 teſe e 2 piedi, biſogna ridurre tutto a piedi, e ſi avrà 130: 26 = 5.

CAPITOLO II.

Delle Frazioni.

41. SI è veduto (8) che coſa è *Frazione*, Ella può definirſi nel ſenſo il più eſteſo *una diviſione indicata*; e nel ſenſo più ſtretto, e come oppoſta all' intiero, ella è *una diviſione indicata che non può conſumarſi*.

42. Tutte e due queſte definizioni eſiggono neceſſariamente due termini, de' quali l' uno rappreſenta il dividendo, l'altro il diviſore. Si mettono l' uno ſotto l' al-

l' altro con una piccola linea traverſale fra loro. Il ſuperiore, che rappreſenta il dividendo, è detto *numeratore*, l'inferiore, che rappreſenta il diviſore, diceſi il *denominatore*. Nella frazione $\frac{3}{5}$, 3 è il *numeratore*, 5 il *denominatore*.

43. Se il numeratore è *moltiplice* del denominatore, cioè ſe lo contiene giuſtamente un dato numero di volte, allora la Frazione è *ſuppoſta*. Come $= \frac{12}{3} = 4$.

44. Se il numeratore è più grande, ma non moltiplice del denominatore, la Frazione è *miſta*. Come $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$.

45. Finalmente chiamaſi *Frazione pura*, lorchè il numeratore è più piccolo del denominatore. Come $\frac{3}{8}$: ſu queſta frazione non può farſi diviſione alcuna.

46. Il valor aſſoluto d'una frazione è tanto più grande, quanto più grande è il ſuo numeratore, e quanto più piccolo è il ſuo denominatore: ed al contrario ec.

Per comprenderne la ragione, non ſi ha che ricordarſi, che il numeratore è il dividendo, il denominator il diviſore, ed il valor della frazione è il quoziente. Onde $\frac{3}{4} > \frac{2}{5}$.

47. Duplicare, triplicare ec. il valore d'una frazione è lo ſteſſo che moltiplicar il ſuo numeratore, o divider il ſuo denominatore per 2, 3, ec. Come $\frac{2}{5} \times 2 = \frac{4}{5}$, e $\frac{1}{4 \div 2} = \frac{1}{2}$.

48. Non ſi cambia punto il valore d'una frazione nè col moltiplicare, nè col divider i ſuoi due termini per la ſteſſa quantità. $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; $\frac{3}{6} : 3 = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$.

Da ciò ſi deduce la maniera di ridurre le frazioni.

Riduzione de' Fratti.

49. *Ridurre* le frazioni è lo ſteſſo che trasformarle ſenza cambiar il loro valore, affin di render più comode l'altre loro operazioni.

50. *Per*

50. *Per ridurre gl' intieri a frazioni.*

1°. Si può ridurre ogni intiero a frazione col mettergli sotto 1 per denominatore. Così $6 = \frac{6}{1}$.

2°. Per ridurre un intiero ad una frazione di qualsivoglia denominatore, convien moltiplicar l'intiero per il dato denominatore; il prodotto sarà il numeratore della frazione. Onde per ridurre 6 ad una frazione il di cui denominatore sia 7, si avrà $6 = \frac{42}{7}$. E' chiaro che dividendo 42 per 7, il quoziente è 6, onde $6 = \frac{42}{7}$.

3°. Un intiero unito con una frazione si riduce ad una sola frazione, col moltiplicar l' intiero per il denominatore della frazione, e coll' aggiunger a questo prodotto il numeratore; la somma sarà il numeratore della frazione ridotta: $6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$.

51. *Per ridurre più frazioni ad uno stesso denominatore.*

Si moltiplichi primo i denominatori fra loro, e si avrà il denominatore comune: indi si moltiplichi il numeratore di ciascuna frazione per ciascun denominatore di tutte l'altre frazioni.

Così per ridurre $\frac{2}{3}$, e $\frac{3}{4}$ ad uno stesso denominatore, si avrà $\frac{8}{12} + \frac{9}{12}$. E $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{12}{24} + \frac{18}{24} + \frac{16}{24}$.

52. Nella stessa maniera si possono ridurre quante frazioni si vogliono ad uno stesso numeratore, non avendosi da far altro che moltiplicar i termini di ciascuna frazione per ciascun numeratore dell'altre. Onde $\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{6}{18} + \frac{6}{8} + \frac{6}{15}$, perchè $1 \times 3 \times 2 = 6$, $3 \times 3 \times 2 = 18$, $4 \times 1 \times 2 = 8$, $5 \times 3 \times 1 = 15$.

53 *Ridurre una frazione all' espressione la più semplice.*

Convien trovar il *più gran comune divisore*, cioè un numero, per cui si divida intieramente il numeratore ed il denominatore della frazione. Come per ridurre la frazione $\frac{6}{27}$ all' espressione la più semplice, bisogna trovar un numero, come 3, per cui 6 e 27 si dividan senza resto; i quozienti 2 e 9 saranno i due ter-

termini della frazione $\frac{6}{27}$ ridotta alla più semplice espressione $\frac{2}{9}$.

54. Ecco il metodo, *per trovar il più gran divisore comune di due quantità*.

Dividasi la maggior quantità per la minore; se non vi è resto, la minore sarà il più gran divisore cercato.

Ma se vi è resto, si divida la minore per questo resto; se la divisione riesce esatta, questo resto è il più gran divisore.

Ma se questa seconda divisione è con resto, dividasi il primo resto per il secondo resto: se questa terza divisione è senza terzo resto, il secondo resto sarà il gran divisore. E così via via: onde in generale *il resto che divide giustamente il resto precedente è il più gran comune divisore cercato*.

Così per ridurre $\frac{91}{294}$ all'espressione la più semplice, dividasi 294 per 91, e trascurando il quoziente 3, si prenda il resto 21 per cui si divida 91. Si trascuri il quoziente 4, e si prenda il resto 7 per cui si divida 21; il quoziente è 3 senza altro resto. Dunque 7 è *il più gran comune divisore* pe 91 e 294. Onde dividendo per 7 il numeratore, ed il denominatore della frazione $\frac{91}{294}$, ella sarà ridotta a $\frac{13}{42}$, ch'è la sua più semplice espressione.

La ragione di questa regola è, che due quantità non sono esattamente divisibili per uno stesso numero, se non quando elle son prodotti esatti di questo numero.

Quindi siegue che quando queste divisioni vengon ad aver in fine l'unità per ultimo resto, la frazione non può ridursi ad una espressione più semplice, perchè l'unità è un divisore comune a tutti i numeri.

Ogni numero intiero, che non è moltiplice d'alcun altro numero intiero maggiore dell'unità, si chiama *numero primo*. I numeri primi minori di 100 sono, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89,

97.

97. E' chiaro, che una frazione composta di *numeri primi* non può ridursi ad espressione più semplice.

Ogni numero pari è moltiplice di 2, cioè divisibile per 2: dunque se i termini d'una frazione son numeri pari, possono esser ridotti alla loro metà. Come $\frac{128}{412} = \frac{64}{216} = \frac{32}{108} = \frac{11}{54} = \frac{8}{27}$.

Addizione de' Fratti.

55. Per sommare più frazioni, bisogna prima ridurle tutte ad uno stesso denominatore, e poi sommarne tutti i numeratori, e mettervi sotto il denominatore comune. $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{12+16+18}{24} = \frac{46}{24} = \frac{23}{12}$

Sottrazione de' Fratti.

56. Dopo aver ridotto *separatamente* le due quantità proposte in una sola frazione, diasi alle due frazioni risultanti un denominatore comune, il quale si scrivi sotto alla differenza de' numeratori. $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{31}{20} - \frac{7}{6} = \frac{186-140}{120} = \frac{23}{60}$

Da questa operazione apparisce, che quando si tratta di sommare o di sottrarre le frazioni, non si deve prender la pena di ridurre alla più semplice espressione che il risultato dell'ultima operazione.

Se vi sono degli intieri alla testa de' fratti, convien sottrarre gl'intieri nella maniera degli intieri, ed i fratti all'uso de' fratti. $4\frac{3}{4} - 3\frac{1}{3} = 1\frac{5}{12}$.

Per sottrarre una frazione da un intiero, bisogna ridurre l'intiero in frazione. $3 - \frac{1}{2} = \frac{3}{1} - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{3} = \frac{8}{5} = 2\frac{2}{5}$.

Lo stesso bisogna fare, se la frazione da sottrarsi è maggiore $6\frac{1}{4} - 3\frac{2}{3} = \frac{25}{4} - \frac{11}{3} = \frac{75-44}{12} = \frac{31}{12} = 2\frac{7}{12}$

Mol-

Moltiplicazione de' Fratti.

57. Per moltiplicar i fratti non vi è bisogno di riduzione; basta moltiplicar i numeratori fra loro; il prodotto di quelli sarà il numeratore, ed il prodotto di questi il denominatore della nuova frazione.

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Se si ha da moltiplicar un intiero per un fratto, bisogna ridurre l'intiero a frazione col mettergli per denominatore 1; ovvero basta moltiplicar l'intiero per il numeratore della frazione

$4 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

58. La ragione di queste regole è, che moltiplicare, per esempio, $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ non è altro, che prender $\frac{2}{5}$ tante volte quante l'unità è contenuta in $\frac{1}{2}$: or l'unità non è contenuta che una mezzavolta in $\frac{1}{2}$; dunque bisogna prender $\frac{2}{4}$ una mezza volta: onde $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

59. *La riduzione de' fratti di fratti* appartiene alla moltiplicazione; e non già alla divisione, come a prima vista può sembrare. In fatti prender i $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$, non è forse dividere $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{3}$? No; anzi è moltiplicarli. Se si avesse da prender il $\frac{1}{3}$ di $\frac{3}{4}$, bisognerebbe moltiplicar 1×3 numeratori, e 3×4 denominatori, e si avrebbe $\frac{3}{12}$, ma siccome bisogna prender i due terzi, bisogna dunque raddoppiare quel che si ha trovato, cioè moltiplicar il numeratore 2 per il numeratore 3. Onde

$\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

60. La moltiplicazione per le parti aliquote (30) può farsi di una maniera comoda col ridurre e trattar i termini in frazione. Avendosi, per esempio, da moltiplicare 5 piedi e 3 pollici per 2 piedi e 4 pollici, si possono considerar i pollici come frazioni di piedi: onde

de il proposto esempio si ridurrebbe a questa forma $5\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{3}$, perchè 3 pollici son il $\frac{1}{4}$ d'un piede, e 4 pollici il $\frac{1}{3}$ d'un piede. Sicche riducendo ciascun termine ad una sola frazione, si avrebbe

$\frac{21}{4} \times \frac{7}{3} = \frac{147}{12} = 12 + \frac{3}{12} = 12\frac{1}{4}$.

61. Ma siccome ne' numeri troppo composti questa operazione in fratti riuscirebbe assai lunga e penosa, per non inviluppars nel tedio de' calcoli, ecco un metodo più spedito.

Esempio.

teſe	piedi	pollici	linee	punti	
6,	5,	4;	0,	0	moltiplicando
4,	2,	6,	0,	0	moltiplicatore
27,	3,	4,	0,	0	prodotto di 4 per la prima linea
2,	1;	9,	4,	0	prodotto di 2 per la prima linea
6,	3,	5,	4,	0	prodotto di 6 per la prima linea
30,	2,	6,	8,	0	prodotto totale.

In questo esempio è da osservarsi,

1°. Che il prodotto del moltiplicatore 4 per la prima linea è secondo la moltiplicazione ordinaria degl' intieri.

2°. Che il prodotto di 2 piedi per la prima linea si è fatto considerando 2 piedi come $\frac{2}{6}$ o $\frac{1}{3}$ di teſa; onde $\frac{1}{3} \times 6 = 2$, e si è posto 2 sotto la colonna delle teſe. Indi $\frac{1}{3} \times 5 = 1 + \frac{2}{3}$, cioè 1 piede, che già si è posto nella colonna de' piedi, ed avanzan 2 piedi che sono 24 pollici. Questi 24 pollici si unisean ai 4 pollici del moltiplicando, e si avrà 28 che moltiplicato

cato per $\frac{1}{3} = \frac{28}{8} = 9 + \frac{1}{3}$, cioè 9. pollici che si metton alla colonna de' pollici, ed avanza 1 poll. = 12. linee. Onde $12 \times \frac{1}{3} = 4$, che si mette nella colonna delle linee.

3°. Che il prodotto di 6. poll. per la prima linea è ricavato nella maniera predetta, considerando 6. poll. come $\frac{1}{2}$ piede, il qual piede è $\frac{1}{8}$ di tesa, onde 6 poll. $= \frac{1}{12}$ di tesa. Dunque $\frac{1}{12} \times 6 = \frac{6}{12}$, perciò o nella colonna delle tese; e 6 tese o sia 36 piedi uniti con $5 = 41 \times \frac{1}{12} = 3 + \frac{5}{12}$; si è posto 3 nella colonna de' piedi, e 5 che avanzano ovvero 60 poll. $+ 4 = 64$, $64 \times \frac{1}{12} = 5 + \frac{4}{12}$, si è posto 5 alla colonna de' poll., e 4 in quella delle linee.

4°. Il prodotto totale è la somma de' tre prodotti precedenti.

La prova di questa operazione si fa col dimediare una delle dimensioni, e col raddoppiar l'altra.

Ecco l'addotto esempio messo a prova.

tese	piedi	poll.	linee,	punti	
3,	2,	8,	0,	0	moltiplicando dimediato
8,	5,	0,	0,	0	moltiplicatore raddoppiato
27,	3,	4,	0,	0	prodotto di 8 per la prima linea
1,	4,	4,	0,	0	prodotto di 5 per la prima linea
1,	0,	10,	8,	0	prodotto di 5 per la prima linea
30,	2,	6,	8,	0	prodotto totale.

Qui è da osservarsi, che dovendosi moltiplicare 5 piedi per la prima linea, si son considerati 5 piedi come $\frac{5}{6}$ di tesa; e siccome $\frac{5}{6}$ è composto di $\frac{3}{6}$ e di $\frac{2}{6}$, ovvero di $\frac{1}{2}$, e di $\frac{1}{3}$, perciò si è prima moltiplicata la prima linea per $\frac{1}{2}$, e n'è nato il prodotto della quarta linea; e poi si è moltiplicata la prima linea per $\frac{1}{3}$, e n'è nato il prodotto della quinta linea. Questa risolu-

luzione deve sempre osservarsi, lorchè il numeratore della frazione non è 1.

Come si è fatto il calcolo di due dimensioni per le superficie, nella stessa maniera si può far di tre dimensioni per i solidi; poichè compito quello di due dimensioni, sotto il prodotto totale si metta la terza dimensione, e si proceda di nuovo nel modo stabilito.

Della Divisione de' Fratti.

62. Questa divisione si fa col moltiplicar in croce i termini, badando di mettere per denominatore della nuova frazione il prodotto del numeratore del dividendo per il denominatore del divisore. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$.

63. Questa moltiplicazione in croce è lo stesso che rovesciar i termini del divisore, e moltiplicar poi i numeratori fra loro, ed i denominatori fra loro.

64. Una tal operazione fatta pel rovesciamento de' termini spiega una specie di paradosso, che suol colpir i principianti. Accade spesso nella moltiplicazione de' fratti, che il prodotto sia più piccolo del moltiplicando: $2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Al contrario nella divisione il quoziente riesce maggiore del dividendo; $2 : \frac{2}{3} = \frac{6}{2} = 3$. Ciò deve necessariamente accadere, sempre che la frazione, che rappresenta il moltiplicatore o il divisore, è più piccola dell'unità: perchè allora il suo numeratore è più piccolo del denominatore. Quando dunque la frazione resta diretta nella moltiplicazione, è il più piccolo termine che moltiplica la prima frazione, mentre il più grande la divide. Quando al contrario la frazione si rovescia nella divisione, è il più gran termine che moltiplica la prima frazione; mentre il più piccolo la divide; guadagna dunque più di quel che perde, ed in conseguenza divien maggiore.

65. Per ridurre i fratti in intieri, non si ha che mol-

moltiplicar ciascun numeratore per tutti gli altri denominatori eccetto per il suo proprio. $\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = 8 + 9$.

CAPITOLO III.

Delle Frazioni Decimali.

66. LE *Frazioni Decimali* son quelle, delle quali il denominatore è 1, seguito da uno o più zeri come $\frac{3}{10}$, $\frac{62}{100}$ $\frac{7}{1000}$ sono *frazioni decimali*.

67. In queste frazioni si sopprime ordinariamente il denominatore, ed in sua vece si mette avanti al numeratore un punto o una virgola. Così $\frac{5}{10} = .5$; $\frac{46}{100} = .46$. Nella stessa guisa. 125 esprime cento venti cinque parti d'una cosa qualunque divisa in mille parti. Onde. $125 = \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$ $\frac{125}{1000}$ Altri esprimono le frazioni decimali in questa maniera, $125'''$.

Dunque nelle decimali la prima cifra a destra dopo il punto esprime le decine, la seconda le centinaja, la terza le migliaja ec. Lorchè non vi è numero intiero avanti una frazione *decimale*, si mette ordinariamente un zero avanti il punto: onde invece di .5, si scrive 0. 5. Questo non serve ad altro, che per render il punto più rimarchevole, e per toglier ogni equivoco.

68. Siccome i zeri che si metton a destra de' numeri intieri, li fan crescere in ragion decupla (poichè 2 con un zero dopo divien dieci volte maggiore, cioè 20); così le frazioni decimali decrescono in ragion decupla, o crescon in ragione suddecupla, cioè divengono dieci volte più piccoli mettendo de'zeri alla loro sinistra. Se si vuole dunque render la frazione decimale 0.5 dieci volte più piccola, cioè esprimente centesimi, scrivasi 0. 05.

I zeri dunque che si metton a destra delle *decimali*, non significan niente; come 0, 5000 = 0, 5. Sono lo

ſteſſo in un ſenſo oppoſto riguardo ai numeri intieri 00005 = 5.

69. Da una Frazione Decimale compoſta di più cifre, ſe ne può toglier qualcuna alla deſtra, ſenza molto diminuir il valore della frazione. Togliendo, per eſempio, dalla frazione 2. 4546 teſe l' ultima cifra 6 ſcrivendo 2. 454, il valor della frazione ſarebbe diminuito di $\frac{6}{10000}$ di teſa, cioè una mezza linea in circa. Ma ſe ſi toglieſſero le due ultime cifre, ſcrivendo 2. 45, il valor della frazione ſarebbe diminuito di $\frac{46}{100000}$ di teſa, che vale circa 4 linee. Lorchè dunque ſi levan due cifre, l'ultima che reſta alla frazione 2. 45, va accreſciuta d' un' unità; onde ſi ſcriva 2. 46., la quale ſi accoſta più al vero valore.

70. Poichè le frazioni non ſono ſpeſſo che reſti di diviſione ineſeguibile, perciò ſi ſon inventate le *frazioni decimali* per proſeguire la diviſione.

Eſſendoſi, per eſempio diviſo 147475 per 362, e trovato il quoziente 407 col reſto 141; per proſeguir avanti la diviſione, ſi aggiunga o a queſto reſto, e ſi divida 1410 per 362, il quoziente ſarà 3 con un nuovo reſto 324. Si aggiunga o a queſto ſecondo reſto, e 3240 : 362 = 8 col reſto 344. A queſto terzo reſto ſi aggiunga o, e 3440 : 362 = 9 col reſto 182. E così via via. Onde 147475 : 362 = 407. 389 ec.

Se non vi è biſogno d' una gran preciſione, baſtano due o tre decimali; ma ſe ne richieggono cinque e ſei dove ricercaſi una gran preciſione.

71. *Ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale.*

Si aggiunga o al numeratore, e dividaſi per il denominatore.

Per ridurre in decimale la frazione $\frac{1}{2}$, ſi aggiunga o ad 1, e 10 : 2 = .5. Infatti $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Se il quoziente vien con reſto, biſogna al reſto aggiunger un altro o, e proſeguir la diviſione nel metodo

todo sopraindicato. $\frac{3}{4} = \frac{30}{4} = 7\frac{2}{4} = 7\frac{20}{4} = .75$.

72. Vi son molte frazioni, che non possono ridursi esattamente in decimali per quante volte si aggiunga zero ai resti successivi delle divisioni.

Ciò si riconosce facilmente, o quando si giunge sempre ad aver uno stesso resto, o quando si veggono ritornare le stesse cifre nello stesso ordine: Come per ridurre in frazione decimale $\frac{4}{7}$, si troverà . 571428571 428571428 ec. Nella stessa maniera $\frac{5}{12} = .$ 416666 ec. In questi casi convien contentarsi di due o tre decimali, e non curar il resto. Onde $\frac{4}{7} = 0.57$; $\frac{5}{12} = 0.416$.

73. Si opera sulle Frazioni *decimali* nella stessa maniera come sopra gl'intieri. La sola attenzione che quì richiedesi, è in situar il punto o la virgola, che deve separar le decimali dagl'intieri.

Addizione delle Decimali.

74. Per sommare due o più frazioni *decimali*, non si ha che porle l'une sotto l'altre; gl'intieri sotto gl'intieri, le decine sotto le decine, le centinaja sotto le centinaja ec., e far l'addizione nella maniera ordinaria.

Operazione.

35. 7802	queste	35. 78020
1. 053	quantità	1. 05300
. 42687	equivaglion	. 42687
15. 86	a quest'altre	15. 86000
53. 12007	somma	53. 12007

Si vede, che nella somma vi son tante decimali quante ne contien il più gran numero . 42687 delle

frazioni *decimali*; il che forma una regola per queſta operazione.

Sottrazione delle Decimali.

75. Convien diſporre le quantità nella maniera ſopradetta.

Operazione.

78. 302	4. 00435
9. 5332	. 17
68. 7688 reſto.	3. 83435 reſto.

Moltiplicazione delle Decimali.

76. Queſta operazione ſi fa come quella degl' intieri, ſenza badare alla poſizione de' punti; ma dopo terminata, convien ſeparare col punto tante cifre ſulla deſtra quante decimali ſono nel moltiplicando e nel moltiplicatore.

Operazione.

34.632	
1.5234	
138528	
103896	
69264	
173160	
34632	
52.7583888	prodotto.

Di-

Divisione delle Decimali.

77. Anche questa divisione si fa come quella degli interi; ma nel quoziente bisogna separar con un punto tante cifre sulla destra quanta è la differenza tralle *decimali* del dividendo e quelle del divisore.

Operazione.

dividendo 18. 1263888 | divisore 1. 5254

quoziente 34. 632

Poichè le decimali del dividendo sono sette, e quelle del divisore son quattro, nel quoziente ve ne devon esser tre.

78. Ma se nel divisore vi son più decimali che nel dividendo, convien allora aggiungere alle decimali del dividendo quanti zeri si vorrà, tanti però che le decimali del dividendo contengano maggior numero di cifre di quelle del divisore.

Se si vuol per esempio, divider 49. 1 per 20. 074, aggiungasi al dividendo quattro zeri, onde

dividendo divisore quoziente

49. 10000 : 20. 074 = 2. 44.

79. Questa Aritmetica *decimale* è stata inventata da Regiomontano, che se n' è servito nella costruzione delle tavole de' seni.

80. Vi sono diverse altre specie di frazioni.

Le *Sessagesimali* son quelle, di cui i denominatori son le potenze successive di 60; cioè 60 X 60, 60 X 60 X 60. ec.

Queste frazioni sono state inventate per la divisione del circolo, il quale si divide in 360 gradi, ogni grado in 60 minuti, ogni minuto in 60 secondi, ogni secondo in 60 terzi ec. Queste parti si esprimon così

1°, 1′, 1″, che significano un grado, un minuto, un secondo ec.

Quante divisioni e suddivisioni si son fatte sopra i pesi, misure, monete ec. somministrano tante frazioni diverse, che hanno un denominator uguale ad un numero di parti uguali, in cui il tutto è stato diviso.

Sarebbe ben desiderabile, che tutte le divisioni fossero decimali, cioè che il tutto fosse stato diviso di 10 in 10. Questa divisione renderebbe il calcolo più facile e più comodo, e sarebbe molto preferibile alla division arbitraria dell'anno in 12 mesi, del mese in 30 giorni, del giorno in 24 ore, dell' ora in 60 minuti; e così di tutte l'altre divisioni di pesi, misure, e monete ec.

Quanto finora si è quì spiegato è quel che si chiama Aritmetica Numerica.

LIBRO SECONDO
DELL' ALGEBRA.

CAPITOLO PRIMO.

Dell' Algebra propriamente detta.

81. TUtte le operazioni fatte colle cifre Arabe nell' Aritmetica Numerica, poſſon anche farſi più facilmente colle lettere dell' Alfabeto, che ſono ſegni Univerſaliſſimi e d' un uſo più facile, e più comodo di qualunque altra ſpecie di ſegni. Or il metodo di far le combinazioni ed il calcolo delle quantità rappreſentate dai ſegni i più univerſali è quella che ſi chiama propriamente Algebra.

82. *Eſpreſſione* o *quantità Algebraica* è una o più grandezze diſegnate da una o più lettere dell' Alfabeto; ordinariamente ſi prendon le lettere minuſcole.

83. Una quantità Algebraica può eſser *incompleſſa*, o *compleſſa*.

Incompleſſa è quella ch' è ſola, cioè non è nè preceduta nè ſeguita da altra quantità unita col ſegno +, o ſeparata col —. Onde a, ab, acd, — b, —bcd, ſon tutte quantità *incompleſſe*. L' incompleſſa ſi chiama anche *Monomio*.

84. *Quantità Compleſſa* è quella, che è compoſta di più quantità congiunte o ſeparate con i ſegni +, o — Come a + b, aa + b — c dd. La quantità *compleſſa* diceſi anche *Polimonio*; ſe è di due termini, come a + b, diceſi *Binomio*; ſe di tre, co-

me a + b + c, *Trinomio*; se di quattro, come ad + bcd + e — fi, *Quadrinomio* &c.

85. Chiamansi *Termini* le parti compresse tra i segni d'un polinomio. Dicesi *termine positivo* quello ch' è preceduto dal segno +; e *termine negativo* quello ch' è preceduto dal segno —. Onde la quantità + a — b + 2c — dd ha due termini positivi, e due negativi.

Quando il primo termine non è preceduto da alcun segno, si prende per *positivo*; onde a+b è lo stesso che +a +b.

86. Una cifra o una quantità qualunque che precede un termine qualunque si dice *Coefficiente* del termine. In 2abc il *coefficiente* è 2. Questo *coefficiente* significa, che il termine abc è preso 2 volte, o moltiplicato per 2. Così di ax e di nz, i coefficienti sono *a*, *n*.

Un termine che non è preceduto da alcuna cifra, si suppone che abbia per coefficiente l' unità; onde ab = 1ab.

87. Una cifra posta al di sopra d'una lettera, come a^2, dicesi *esponente*; e significa, che quella lettera è moltiplicata tante volte in se stessa, e deve essere scritta tante volte di seguito quante unità si contengono nell' esponente. Onde $a^2 = aa$, $a^4b^2c^3 = aaaabbccc$.

Una lettera che non ha alcun esponente, si suppone che abbia per esponente l'unità: $ab = a^1b^1$.

La differenza tra il *coefficiente* e *l'esponente* è ben sensibile, 3a = a+a+a; $a^3 = aaa$. Or se a = 2, 3a = 6 $a^3 = 8$.

88. I termini d'una quantità complessa diconsi *simili*, se hanno le stesse lettere e precisamente lo stesso numero di lettere, per quanto diversi sieno i loro coefficienti ed i loro segni. La quantità 2ab + bc — 3bc + abd, ha due termini simili, + bc — 3bc. Ma a^2b — ab^2 non sono termini simili, perchè in a^2b — $ab^2 = aab$ — abb, le lettere non sono in ciascun termine nello stesso numero.

OPE-

OPERAZIONI ALGEBRAICHE.

Queſte Operazioni ſono: Riduzione, Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione, Diviſione.

Riduzione.

89. La Riduzione conſiſte in eſporre ed eſprimer le quantità Algebraiche colla maggior ſemplicità.

1.° *I termini e lettere di ciaſcun termine devon conſervar ſempre l'ordine Alfabetico*. dc + ba + cba + c — b, van diſpoſte così ab + abc + dc — b + c.

2.° *Lorchè vi ſono più termini ſimili, biſogna ridurli ad un ſol termine, e cancellarli ſe ſi diſtruggono*. Queſta regola racchiude tre caſi.

Primo caſo. *Tutti i termini ſimili preceduti dallo ſteſſo ſegno, ſi riducon ad un ſol termine preceduto anche da uno ſteſſo ſegno, e da un coefficiente ugual alla ſomma di queſti termini*. Onde ab — cd + 2ab — 3cd ſi riduce .... 3ab — 4cd.

2.° caſo. *Quando tutti i termini ſimili ſon preceduti da differenti ſegni, convien ſottrarre il minor coefficiente dal maggiore, e ſcriver la differenza collo ſteſſo ſegno del maggior coefficiente*. Come 5ab — 3cd — ab + 2cd ſi riduce in 4ab — cd.

3.° caſo. *Se termini ſimili preceduti da ſegni contrarj, han coefficienti uguali, i termini ſi cancellano*. a2b + bc — ab — bc + ab = aab.

Addizione.

90. Per ſommare le quantità Algebraiche, baſta ſcriverle tutte di ſeguito, e poi far le neceſſarie riduzioni.

Così per unire ab con bc, ſi ſcrive ab + bc.

La ſomma di ab + c, e di b — c, è ab + c + b — c, la quale ſi riduce a ab + b.

Sot-

Sottrazione.

91. La Sottrazione si fa collo scriver di seguito alla quantità data quella che si vuol sottrarre, ma col cambiarne i segni, cioè il + in —, ed il — in +.

Per sottrarre *b* da *a*, si scrive a — b.

Per sottrarre b — c da a + c, si scrive a + c — b + c, che ridotta diviene a — b + 2c.

92. E' per un compenso necessario, che si cambian i segni + in —, ed i — in + nella quantità che si sottrae. Se per sottrarre b — d da *a*, si scrivesse a — b, si toglierebbe troppo; perchè *b* non essendo una quantità intiera, ma diminuita di *d*, si toglierebbe troppo tutto *d*. Dunque affinchè la sottrazione sia esatta, bisogna aggiunger alla differenza quel che si è tolto di troppo, vale a dire che ad a — b bisogna aggiungere *d*, e scrivere a — b + d.

Maggior chiarezza apparisce ne' numeri. Avendosi a sottrarre 8 — 3 da 9, si scrive 9 — 8 + 3 = 4; perchè se si scrivesse 9 — 8 — 3, allora da 9 si sottrarrebbe 11, mentre che 8 — 3 = 5.

Moltiplicazione.

93. La Moltiplicazione Algebraica è molto più semplice della numerica. Basta scriver le quantità Algebraiche le une a canto all' altre senza alcun segno. Onde a × b = ab, cd × f = cdf.

94. Se s'incontran coefficienti, convien moltiplicarli nella maniera ordinaria, 3ab × 5ab = 15 ab.

95. Se vi son esponenti, il prodotto deve aver un esponente ugual alla somma de' moltiplicandi, $a^2 \times a = a^3$; $a^2b \times a^2a^2 = a^4b^3$.

96. Lorchè le quantità da moltiplicarsi, son precedute da +o—, ecco le regole da seguirsi.

1.ª *Regola*, se due termini, che si moltiplicano, hanno gli stessi segni, il prodotto è col segno +, come + a × + b = + ab, — a × — b = + ab.

2. *Re-*

2.ª *Regola*, se due termini hanno segni diversi, il prodotto avrà il segno di ——; come a × ——b = ——ab.

Dunque + × + = +; — × — = +; + × — = —.

Dimostrazione. + 3 × + 1 = + 6; perchè il moltiplicatore + 2 avendo il segno + mostra, che bisogna prender la quantità + 3 positiva quante volte è segnata da 2, cioè bisogna prenderla 2 volte tale quale com' è: or 2 volte × 3 = + 3 + 3 = + 6; dunque + × + = +.

+ 3 × —— 2 = —— 6; perchè il moltiplicatore 2 col segno —— fa conoscere che bisogna sottrarre la grandezza + 3 due volte; or per sottrarre il positivo convien cambiarlo in negativo (91), dunque si scriverà ——3 ——3 = ——6. Dunque + × —— = ——.

Finalmente ——3 × —— 2 = + 6; perchè il segno del moltiplicatore 2 essendo negativo, indica che bisogna sottrarre —— 3 due volte; dunque (91) al termine ——3 che si deve sottrarre, convien mutar il segno, e scrivere + 3 + 3 = + 6. Dunque —— × —— = +.

97. La moltiplicazione de' polinomj si fa come nell' Aritmetica ordinaria, col moltiplicare ciascun termine del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore; si cerca indi la somma di tutti que' differenti prodotti; e se vi sono quantità simili, si riducono.

Esempio 1.º

$a^2 - 2ac + c^2$ moltiplicando

$\times$

$a - c$ moltiplicatore

$a^3 - 2a^2c + ac^2$ prodotto di a per il moltiplicando

$- a^2c + 2ac^2 - c^3$ prodotto di —c per il moltiplicando

$a^3 - 3a^2c + 3ac^2 - c^3$ prodotto totale.

Esem.

Esempio 2.°

$5ab + 3ac - c^2$ moltiplicando
$-5ab + 3ac - c^2$ moltiplicatore

$-25a^2b^2 - 15a^2bc + 5abc^2$ prodotto di $-5ab$ per il moltiplicando
$+15a^2bc + 9a^2c^2 - 3ac^3$ prodotto di $3ac$ per il moltiplicando
$-5abc^2 - 3ac^3 + c^4$ prodotto di $-c^2$ per il moltiplicando

$-25a^2b^2 * + 9a^2c^2 * - 6ac^3 + c^4$ prodotto totale.

I due asterismi notan le distruzioni fatte per i segni contrarj.

98. Talvolta non si eseguisce la moltiplicazione, ma si accenna col segno X; ma per evitare la confusione delle lettere ne' termini complessi, vi si mette sopra una sbarra. Per esprimer il prodotto di $a - b + c$ per $2ab + 3c - e$, si scrive così

$a - b + c \times 2ab + 3c - e$. Altri si servono di parentesi, $(a - b + c)(2ab + 3c - e)$.

Divisione.

99. La Divisione Algebraica si fa precisamente come la numerica.

1.° La regola de' segni $+$ e $-$, è la stessa che nella moltiplicazione.

2.° I coefficienti si dividono come nell' Aritmetica ordinaria.

3.° Si fanno sparire quelle lettere che son comuni al dividendo, ed al divisore.

Esem-

Esempio.

dividendo
12 bcd | 3d divisore
———————
4 bc quoziente

Esempio 2°.

dividendo
15 abc | — 5 ac divisore
———————
— 3 b quoziente

Esempio 3°.

dividendo
— 18 $a^2 c^3 d$ | 3 acd divisore
———————
— 6 ac^2 quoz.

Esempio 4°.

dividendo
— 24 $ac^3 d^4 f$ | — 8 $c^2 d^3 f$ divisore
———————
3 acd quoziente.

4°. Se il divisore non ha niente di comune col dividendo, si mette in frazione nella maniera ordinaria : $\frac{3ab}{5cd}$.

100. Si soglion anche metter talvolta in frazione due termini da dividersi, ancorchè abbian delle lettere comuni. Come $\frac{abc}{ac} = b$; $\frac{6ce}{3cf} = \frac{2d}{f}$; qui sono scacciate via quelle lettere comuni al divisore ed al dividendo.

Lo stesso si fa anche alle frazioni de' *polinomj*; come $\frac{ax - 2abx}{bx + ax^2} = \frac{a - 2b}{b + x}$.

101.

101. Benchè sia generalmente vero, che si debban sopprimere tutte le lettere comuni al dividendo ed al divisore, non ne siegue però che $\frac{abc}{abc} = 0$. Bisogna sempre supporre, che una quantità algebraica sia preceduta dal coefficiente 1; onde $\frac{abc}{abc} = \frac{1}{1} = 1$. Infatti divider abc per abc, è lo stesso che determinare quante volte abc è contenuto in sè stesso: or ogni grandezza è contenuta una volta in sè stessa, dunque $\frac{abc}{abc} = 1$.

102. Per divider i *polinomj*, come $9ab^2 + 6a^3 - 15a^2b$ per $-3ab+2a^2$, bisogna,

1°. Disporre i termini (come si vede nella operazione) secondo i gradi della lettera a che sembra dominare.

Operazione.

dividendo $6a^3-15a^2b+9ab^2$ | divisore $2a^2-3ab$ | quoziente $3a-3b$

$-6a^3+9a^2b$

$-6a^2b+9ab^2$

$+6a^2b-9ab^2$

* *

2°. Divider il primo termine $6a^3$ del dividendo per il primo termine $2a^2$ del divisore, e metter sotto al divisore il quoziente $3a$.

4°. Moltiplicar il quoziente $3a$ per tutto il divisore, e sottrarre il prodotto dal dividendo. Un tal prodotto è $6a^3-9a^2b$, il quale dovendosi sottrarre dal dividendo, cioè sottoporlo con segni contrarj $-6a^3+9a^2b$, il resto sarà $-6a^2b+9ab^2$.

5°. Di

5°. Di questo resto si continui a divider il primo termine $-6a^2b$ per il primo termine $2a^2$ del divisore. Il quoziente sarà $-3b$ per cui si moltiplichi il divisore, ed il prodotto si sottragga dal predetto resto. Non rimane più nulla; dunque il quoziente totale è $3a-3b$.

Ecco un altro esempio, per dividere $15bds-3tg-12csx+8cx^2-10bdx$ per $-5bd+\frac{1}{4}cx$.

Operazione.

dividendo

$8cx^2-12csx-10bdx+15bds-3tg$ | $4cx-5bd$ divisore

$-8cx^2+10bdx$ | $2x-3s-3tg$ quoz.

$*\ -12csx\ *\ +15bds-3tg$

$+12csx\ -15bds\ 4cx-5bd$

$*\ *\ -3tg$

Qui si vede che la divisione non può farsi esattamente, poichè resta $-3tg$ che si mette in frazione col divisore $4cx-5bd$.

Della Composizione e Risoluzione delle quantità.

103. Qualunque quantità può considerarsi,

1°. O come esprimente il semplice valore d'una cosa sola. Come 12 può considerarsi esprimer 12 cose.

2°. O come la somma, o il prodotto di molte altre quantità. $12=9+3=10+2=8+4$, ovvero $12=3\times4=2\times6$ ec.

3°. O come la differenza o il quoziente di più quantità, $12=15-3=17-5$ &c., o $12=\frac{36}{3}=\frac{24}{2}$ &c.

Il principal effetto delle Matematiche, è comparare le quantità fra loro, comporle, e scomporle.

Si

Si parlerà in appreſſo della Comparazione delle quantità.

104. E' ordinariamente facile comporre una quantità di molte altre, perchè ciò ſi fa per mezzo dell'addizione o della moltiplicazione, operazioni tutte due ſempre ſuſcettibili di eſattezza ne' loro riſultati. Ma è difficile e ſpeſſo impoſſibile riſolvere o ſcomporre una quantità, ſpecialmente lorchè ſi vuole valutarla in numeri intieri, perchè ciò ſi fa ordinariamente per mezzo della diviſione, la quale ben di rado dà quozienti ſenza reſto.

105. Qualſiſia quantità a, riguardata come ſemplice e non compoſta, ſi chiama una quantità del *primo grado*, o della ſua *prima potenza*. Se poi queſta quantità ſi moltiplica per sè ſteſſa una volta, due, tre, quattro volte ec., il ſuo prodotto divien una quantità del *ſecondo*, *terzo*, *quarto grado* ec.; ovvero ſi dice ch'ella è inalzata alla *ſeconda*, *terza*, *quarta* ec. *potenza*. In generale, il prodotto divien una quantità d'un grado o d' una potenza eſpreſſa dall' eſponente, che riſulta da queſta moltiplicazione.

Così aa o a^2 conſiderato come prodotto di $a \times a$, ſi chiama il ſecondo grado o la ſeconda potenza di a; a^4, prodotto di $a \times a \times a \times a$, è la quarta potenza di a.

106. La quantità ſemplice, o ſtimata ſemplice, che ſi è inalzata ad una potenza, ſi chiama la *radice* di queſta potenza. Come a è la radice ſeconda di a^2, la radice terza di a^3, la radice ſettima di a^7 ec.

Nella ſteſſa maniera il numero 16 eſſendo la quarta potenza di 2, la radice quarta di 16 è 2.

107. Per analogia alle dimenſioni de' corpi, la ſeconda potenza d'una quantità come a^2, ſi chiama il *quadrato* di a; la terza potenza a^3, ſi chiama il *cubo* di a. Un tempo a^4 ſi diceva il *quadrato-quadrato* di a; a^5, il *quadrato-cubo*; a^6, il *cubo-cubo*: e reciprocamente a ſi chiama la *radice quadrata* di a^2, la *radice cubica* di a^3 ec.

108. La

108. La *compoſizione* e la *riſoluzione* delle quantità ſi riducon a queſte quattro coſe: 1°. A formar una ſola quantità di molte altre: queſta è la pratica dell' addizione e della moltiplicazione. 2°. A trovar tutte le quantità, delle quali una quantità data è il *multiplo*, o compoſta; cioè a trovar tutti i diviſori che poſſon dividere eſattamente e ſenza reſto una quantità data. 3°. Ad elevar una quantità qualunque ad una potenza data. 4°. Ad eſtrarre una radice qualunque da una data quantità riguardata come potenza di quella radice.

Trovar tutti i Diviſori di una quantità data.

109. Se la quantità data è un numero, biſogna,

1°. Tentar di dividerla ſucceſſivamente per tutti i numeri *primi*, finchè ſi trovi un quoziente ſenza reſto.

2°. Divider queſto primo quoziente, per alcuni numeri *primi*, finchè ſi trovi un ſecondo quoziente ſenza reſto.

3°. Divider ancora queſto ſecondo quoziente per i numeri *primi*, finchè finalmente un quoziente ſia l' unità, cioè finchè non ſi trovi più altro diviſore più piccolo dell' ultimo quoziente.

4°. Trovati tutti queſti diviſori convien moltiplicarli due a due, poi tre a tre, indi quattro a quattro ec.

Queſti prodotti e queſti diviſori daranno tutti i diviſori del numero dato.

Eccone il metodo e l' eſempio.

Sia il numero 120 di cui ſi cercano tutti i diviſori.

1	120
2	60
4.2	30
8.2	15
24.12. 6.3	5
120.60.40.30.20.15.10.5	1

1°. Si tiri una sbarra verticale a ſiniſtra di queſto

numero 120, a fianco di cui si metta 1 come suo primo divisore.

2°. Si tenti divider 120 per 2; la divisione riesce, dunque si metta 2 a sinistra della sbarra, ed a destra alla stessa altezza si metta il quoziente 60.

3°. Si tenti divider il quoziente 60 anche per 2: riesce, dunque si metta il nuovo divisore 2 a sinistra sotto il primo, ed a destra il nuovo quoziente 30 sotto 60. Nello stesso tempo si moltiplichi questo nuovo divisore 2 per l'altro 2 di sopra, ed il prodotto 4 si metta a sinistra del secondo 2, come un nuovo divisore del numero proposto 120. La ragione di questa moltiplicazione è, che se 120 è divisibile per 2, e la sua metà per 2, deve esserlo necessariamente per 4.

4°. Siccome 30 può dividersi per 2, si scriva a sinistra 2 alla quarta linea, ed il quoziente 15 a destra.

Si moltiplichi il nuovo divisore 2 per 4, ed il prodotto 8 si metta a sinistra per nuovo divisore del numero proposto. Questo nuovo 2 non va moltiplicato per gli altri 2 di sopra, perchè ne verrebbe 4 che già è scritto.

5°. Non si può 15 divider per 2: dividasi per 3, e mettasi il divisore 3 a sinistra, ed il quoziente 5 a destra. Si moltiplichi 3 per 2, per 4, per 8, che sono nelle bande superiori, ed i prodotti 6, 12, 24 si scrivano a sinistra di 3. E' evidente che questi prodotti sono nuovi divisori del numero proposto.

6°. Finalmente 5 non avendo altro divisor esatto che se stesso, scrivasi 5 a sinistra, ed il suo quoziente 1 a destra. Si moltiplichi 5 per tutti i divisori precedenti 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, ed i prodotti 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120, si scrivano a fianco di 5 nella stessa linea.

Tutti i numeri che sono a sinistra della sbarra, contando da 1 fin a 120, son i divisori di 120.

Onde tutti i divisori del proposto numero 120, sono 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 66, 120.

110. Lo stesso metodo serve per le quantità algebrai-

braiche . Si cerchino, per esempio, tutti i divisori di $b^2d^2+b^3d$.

1	$b^2d^2+b^3d$
b	bd^2+b^2d
b^2, b	d^2+bd
$b^3+b^2d, b^2+bd, b+d$	d
$b^3d+b^2d^2, b^2d+bd^2, bd+d^2, b^2d, bd, d$	1

Dividasi la quantità data per 1, indi per b; e si ha il primo quoziente . Dividasi questo quoziente ancora per b, e si avrà il secondo quoziente d^2+bd . Nel tempo stesso $b \times b$, si metta b^2.

Dividasi il secondo quoziente d^2+bd per $b+d$, si avrà il terzo quoziente d. Nel tempo stesso si moltiplichi $b+d$ per tutti i divisori superiori b, b^2 ; e si avranno i prodotti , b^2+bd , b^3+b^2d .

Finalmente il terzo d non può dividersi che per d; mettasi dunque d a sinistra , ed il quoziente 1 a destra. Si moltiplichi d per tutti i divisori antecedenti , che sono b, b^2, $b+d$, b^2+bd, b^3+b^2d , ed i prodotti bd, b^2d , $bd+d^2$, b^2d+bd^2, $b^3d+b^2d^2$, si mettan a lato di d.

Onde tutti i divisori di $b^2d^2+b^3d$ sono 1 , b, d, $b+d$, b^2 , bd, b^2+bd , $bd+d^2$, b^2d; b^2d+bd^2 , b^3+b^2d, $b^3d+b^2d^2$.

111. Per trovar il più gran comune divisore di due quantità algebraiche, il metodo è lo stesso che quello (54) delle quantità numeriche .

Si cerchi, per esempio, il più gran comune divisore delle quantità $qnp^3+np^2q^2-2npq^3-2nq^4$, e di $2mp^2q^2-4mp^4-mp^3q+3mpq^3$.

1°. Tolgasi qn, che è comune a tutti i termini della prima quantità, e che non si trova nella seconda . Tolgasi parimenti pm, che è comune a tutti i termini della seconda , senza esser contenuto nella prima . Quindi l'operazione sarà ridotta (ordinando le lettere) a trovar il più gran comune divisore di

(A) $-4p^3-p^2q+2pq^2+3q^3$, e di

(B) $p^3+3p^2q-2pq^2-2q^3$

2°. Dividasi A per B, e trascurando sempre il quo-

ziente —4, si avrà per resto (C) $11p^2q-6pq^2-5q^3$.

Si deve ora divider B per C; ma siccome il primo termine p^3 di B non può dividersi per il primo termine $11p^2q$ di C, si può moltiplicare B per 11q, affinchè il suo primo termine possa esser esattamente diviso per il primo termine di C; ma siccome q è contenuto in tutti i termini di C, si può moltiplicar B semplicemente per 11, e così B sarà convertito in (D) $11p^3+33p^2q-22pq^2-22q^3$.

3°. Dividasi D per C, il quoziente sarà *p*, ed il resto sarà (F) $39p^2q-17pq^2-22q^3$.

Ora si deve dividere C per F, ma perchè il primo termine $11p^2q$ di C non è esattamente divisibile per il primo termine $39p^2q$ di F, si moltiplichi C per 39, e C si convertirà in (G) $429p^2-234pq-195q^2$.

4°. Dividasi G per F, il quoziente sarà 11, ed il resto (H) $-47pq+47q^2$. Si deve ora dividere F per H, ed a tal effetto converrebbe moltiplicar F per 47q, ma siccome 47q è un divisore di H, si tolga dunque da H, e resta q—p per divisore di F $39p^2-17pq-22q^2$.

Or dividendo F per q—p, la divisione si fa esattamente senza resto; dunque q—p è il più gran comune divisore.

Infatti dividendosi per q—p le due quantità proposte

$$qnp^3+3np^2q^2-2npq^3-2nq4$$

$$2mp^2q^2-4mp^4-mp^3q+3mpq^3$$

Si convertono in

$$-2nq^3-4npq^2-nqp^2$$

$$3mpq^2+5mp^2q+4mp^3$$

E riducendo, in

$$-nq^2-3nqp-p^2$$

$$q^2+2mqp+mp^2$$

Ele-

Elevazione delle Quantità alle Potenze.

112. Poichè la prima potenza di a è a, o a^1; e la seconda potenza è a^2 o $a \times a$; e la terza potenza è a^3 o $a \times a \times a$: si può formarne questa regola generale: *Che per elevar una quantità ad una potenza data, convien moltiplicarla in se stessa tante volte, quante unità meno una si contengono nell' esponente della potenza.* Così per elevar 3 alla terza potenza, convien moltiplicarlo due volte in sè stesso, $3 \times 3 \times 3 = 27 = 3^3$.

Nella stessa guisa la seconda potenza di $\frac{1}{3}$ è $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, la terza potenza di $\frac{1}{3}$ è $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$. Donde si vede, che una vera frazione divien più piccola quanto a maggior potenza s' innalza.

113. Per elevar un Monomio a qualunque potenza, bisogna mettergli a ciascuna delle sue lettere l' esponente della potenza. Come abc sarà elevato alla sua terza potenza, lorchè sarà espresso così $a^3 b^3 c^3$; e la potenza m di abc, è $a^m b^m c^m$. (Le lettere m che in vece di cifre si mettono agli esponenti, significan esponenti indeterminati).

114. Se nella quantità data vi son lettere che abbian più esponenti, convien moltiplicarli per l' esponente della potenza, cui si vuol innalzare detta quantità. Onde per elevar $a^2 c^3$ alla terza potenza, si moltiplichino gli esponenti per 3, e diverrà $a^6 c^9$.

115. Si suol indicar un polinomio elevato ad una potenza, lorchè vi si tira sopra una sbarra coll' esponente all' estremità. Questa espressione $\overline{a+b}^3$ significa $a+b$ elevato alla terza potenza. Altri scrivono $(a+b)^3$.

116. Se si eleva al quadrato la quantità $a+b$, o $-a-b$, servendosi della moltiplicazione, si ha $a^2 + 2ab + b^2$.

Donde siegue, *che il quadrato d' un binomio è composto del quadrato del primo termine, del quadrato*

del ſecondo termine, e del prodotto del doppio del primo termine per il ſecondo termine. E che quando i due termini hanno lo ſteſſo ſegno, tutte le parti del quadrato ſon poſitive, ma lorchè i due termini han ſegni differenti, il prodotto del doppio per il primo termine è negativo.

Se un binomio s' innalza alla terza potenza, $\overline{a+b}^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$: il che dimoſtra, che *il cubo d'un binomio qualunque è compoſto de' cubi de' ſuoi due termini, e de' prodotti di tre volte il quadrato di ciaſcun termine per l'altro*.

Così $\overline{a+b}^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$.

117. Nella formazione di queſte potenze è da oſſervarſi, che gli *eſponenti* del primo termine *a* decreſcono ſecondo la ſerie de' numeri 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; all' incontro gli eſponenti del ſecondo termine *b* creſcono ſecondo la ſerie inverſa de' numeri precedenti, cioè, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ma il maggior eſponente nell' uno e l'altro termine è ſempre 6.

I *Coefficienti* camminano con queſta legge: Il coefficiente del termine precedente è diviſo per l' eſponente di *b* del dato termine, ed il quoziente è moltiplicato per l' eſponente di *a* dello ſteſſo termine, accreſciuto però d'una unità. Onde nell'addotto eſempio, il coefficiente del primo termine è 1, quello del ſecondo è $\frac{1}{1} \times 5 + 1 = 6$, del terzo $\frac{6}{2} \times 4 + 1 = 15$, del quarto $\frac{15}{3} \times 3 + 1 = 20$, del quinto $\frac{20}{4} \times 2 + 1 = 15$, del ſeſto $\frac{15}{5} \times 1 + 1 = 6$, del ſettimo $\frac{6}{6} \times 0 + 1 = 1$.

118. Da queſta ſerie coſtante degli eſponenti e de' coefficienti ſi può ſtabilir una formola generale per innalzar il binomio $a+b$ a qualunque potenza m. Onde la ſerie de' termini (non conſiderati per ora i coefficienti) anderà così: a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$ ec. dovendoſi continuare finchè l' eſponente di *b* divenga *m*.

I coef-

I coefficienti poi cammineran in quest' ordine $1, m, m\times\frac{m-1}{2}, m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}, m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}$ ec.

Onde si avrà la formola generale $a+b=a^m+ma^{m-1}b+m\times\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2+m\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3$ ec.

Nella stessa guisa si trova la formola per il binomio $a-b^m$, con questo solo divario, che il termine deve esser negativo, lorchè l'esponente di *b* è numero dispari. Come nel cubo $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$, il secondo e quarto termine sono negativi; la ragion si rileva evidentemente dalla moltiplicazione.

119. La stessa formola può applicarsi ancora ad una quantità composta di più di due termini. Volendosi, per esempio, elevar il trinomio $a+2b-c$ alla potenza *m*, non si ha che far i due primi termini $a+2b=p$, ed il terzo termine $-c=q$. In questo caso il trinomio $a+2b-c=p-q$. S'innalzi dunque $p-q$ alla potenza *m* secondo la formola prescritta, ed i valori trovati di $\overline{p\ q}^m$ si sostituiscano ad $a+2b-c$.

Si elevi, per esempio, $\overline{a+2b\ c}^3$. Fatto $a+2b=p$, $-c=q$, sarà $\overline{p\ q}^3=p^3-3p^2q+3pq^2-q^3$.

Si sostituisca ora $a+2b$ ai valori trovati di p, e $-c$ a quelli di *q*, la quantità trovata $p^3-3p^2q+3pq^2-q^3$ diverrà $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3-3a^2c-12b^2c-12abc-12b^2c+3ac^2+6bc^2-c^3$.

Lo stesso è per un polinomio qualunque; deve sempre ridursi ad un binomio.

120. Sopra gli esponenti si posson fare le quattro operazioni ordinarie.

1°. L'Addizione e la Sottrazione son inutili, perchè nè la somma nè la differenza di due potenze posson ridursi ad un esponente comune: la loro più semplice espressione è $a^m \pm a^n$.

2°. Moltiplicazione. Sia a^m da moltiplicarsi per a^n. Facciasi la somma de' due esponenti, e si scriva a^{m+n}.

Infatti se m=3, e n=2, sarà $a^{m+n}=a^{3+2}=a^5=$ aaaaa=aaa × aa .

3°. Divisione . Per dividere a^m per a^n , prendasi la differenza de'due esponenti, e si scriva a^{m-n} . Infatti se m=5 , e n=2, sarà $a^{m-n}=5-2=a^3=aaa=\frac{aaaaa}{aa}$.

Se n=m , l'*esponente* ridotto diviene *o*, ed il quoziente è $a^o=1$. Perchè (ad *n* sostituendo *m* che gli è uguale per supposizione) sarà $a^o=a^{m-m}=a^{\frac{m}{m}}=1$.

Se n>m , l' *esponente* del quoziente sarà negativo . Poichè se n=5 , e m=2 , sarà $a^{m-n}=a^{2-5}=a^{-3}$. Ma questo a^{-3} che cosa è? Egli deriva dall' espressione di $\frac{aa}{aaaaa}=\frac{1}{aaa}=a^{\frac{1}{3}}$. Il che fa vedere , che una potenza *negativa* equivale ad una frazione, di cui il numeratore essendo l' unità, il denominatore è quella potenza stessa divenuta *positiva :* siccome reciprocamente una potenza *positiva* equivale ad una frazione di cui il numeratore è ancora l' unità , ed il denominatore quella stessa potenza divenuta *negativa*.

$$a^{\frac{1}{+m}}$$

In generale $a^{+\frac{1}{m}}=a$

121. Per maggior intelligenza di ciò , convien riflettere che non si danno mai quantità *negative* ed assolute in loro stesse . Elle son tali solo relativamente alle quantità positive , dalle quali si deve o si può supporre che sieno sottratte . Onde a^{-m} non esprime qualche cosa di distinto, se non che relativamente ad una quantità a^n espressa o sottintesa .

In

In questo caso dunque a^m mostra, che se si volesse dividere a^n per a^{-m}, bisognerebbe togliere dall' esponente n tante unità quante ve ne sono in m; ecco perchè $a^{-m} = a^{\frac{1}{m}}$. Dunque a^{-m} non è altro che l'espressione di $a^{\frac{1}{m}}$, espressione più comoda nel calcolo.

Nella stessa maniera a^0 indica la moltiplicazione di $a^m \times a^m$, ovvero la divisione di $a^{\frac{m}{m}} = 1$.

Estrazione delle Radici.

122. Dalla composizione delle potenze facilmente si comprende la loro risoluzione, o sia l' *estrazione* delle *radici*.

Estrarre la radice non è altro che *scomporre una quantità qualunque in maniera, che se ne trovi una minore, la quale moltiplicata in sè stessa un certo numero di volte, produca esattamente la prima quantità, o almeno vi si accosti più che sia possibile*. Per estrarre, per esempio, una radice da 4, si ha da scomporre questo numero in maniera che trovata una sua parte 2, questo 2 moltiplicato una volta in sè stesso produca esattamente 4.

123. Per estrarre una radice qualunque da un monomio, convien divider l'esponente di ciascuna lettera di esso monomio per l'esponente della radice. Per aver la radice quadrata di a^2c^6, bisognerà dunque scrivere $a^{\frac{2}{2}} c^{\frac{6}{2}}$; questa operazione rende frazionarj gli esponenti delle lettere. Onde $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Se queste frazioni possono ridursi ad intieri, l' estrazione

zione della radice è *perfetta*, come $a^{\frac{2}{2}} c^{\frac{6}{2}} = ac^3$.

Ma se si avesse da estrarre la radice quadrata di $a^3 c^5$, siccome questa frazione $a^{\frac{3}{2}} c^{\frac{5}{2}}$ non può ridursi ad intiero, la radice sarà *imperfetta*.

124. Quando la radice essemplicemente *indicata*, vi si mette avanti $\surd$ che si chiama *segno radicale*, tra i cui gambi si mette l'esponente della radice. Come $\sqrt[3]{ab}$ significa, che dalla quantità *ab* si ha da estrarre la radice *cubica*. Quando al segno radicale non si mette alcuna cifra, s'intende la radice *quadrata*.

125. Il segno radicale annunzia evidentemente l'estrazione delle radici nelle quantità semplici. $\sqrt{a^2} = a$, $\sqrt{a^2 c^2} = ac$.

Si vede al primo colpo d'occhio, che le quantità proposte sono state generate dalla moltiplicazione delle radici che loro si attribuiscono, e che $a^2 = a \times a$, $a^2c^2 = ac \times ac$.

126. Se il monomio ha un coefficiente, bisogna anche dal coefficiente estrarre la radice secondo le regole che or ora si daranno per i numeri.

Così $\sqrt{9a^2c^2} = 3ac$, $\sqrt{\frac{a^2}{9c^2}} = \frac{a^2}{3c}$ &c.

227. Per indicar l'estrazione della radice de' Polinomj, si cuopre il polinomio con una linea tirata dopo il segno radicale. Onde per designare la radice quadrata di a^2+b^2, si scrive $\sqrt{a^2+b^2}$. Altri scrivono così $\overline{a^2+b^2}^{\frac{1}{2}}$, o $\sqrt{(a^2+b^2)}$, o $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$. Per indicare la radice cubica, si scrive così $\sqrt[3]{a+b}$

Estra-

Estrazione della Radice Quadrata.

128. Sia $a^2+2ab+b^2$, da cui vogliam estrarre la radice quadrata.

e	$2a+b$
$a^2+2ab+b^2$	$a+b$ radice
$-a^2$	
$*+2ab+b^2$	
$-2ab-b^2$	
$*\ *$	

1.° Estraggasi dal primo termine a^2 la radice quadrata a, e si metta da parte. Si quadri la radice a, ed il suo prodotto a^2 si sottragga dalla quantità E; il resto sarà $+2ab+b^2$.

2.° Si raddoppi la radice a, ed il suo doppio $2a$ si metta sopra la radice. Dividasi il suo termine $+2ab$ del resto per $2a$, ed il quoziente $+b$ si scriva alla radice, e sopra a canto a $2a$.

Si moltiplichi questo quoziente b per $2a+b$, ed il prodotto si sottragga dal predetto resto. Non rimane più nulla. Dunque $a+b$ è la radice esatta di $a^2+2ab+b^2$.

Ecco un'altra operazione più a lungo.

$\sqrt{\ a^4+6a^3c+5a^2c^2-12ac^3+4c^4}$	$2a^4+6ac-2c^4$
$-a^4$	$2a^2+3ac-2c^2$
	$a^2+3ac-2c^2$ radice
$*\ +6a^3c+5a^2c^2-12ac^3+$	
$4c^4-6a^3c-9a^2c^2$	
$*\ -4a^2c^2-12ac^3+4c^4$	
$+4a^2c^2+12ac^3-4c^4$	
$*\ *$	

La prova dell'estrazione della radice quadrata, è la mol-

moltiplicazione della radice per sè stessa ; il prodotto deve dare la prima quantità.

La ragione di questa operazione rilevasi chiaramente da (116)

129. Lo stesso metodo serve precisamente per estrarre da numeri le radici quadrate.

Ma convien prima sapere le radici quadrate de' numeri che son al disotto di 100. Eccole

Quadrati... 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.

Radici .... 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Siegue da ciò, *che un numero semplice non può aver più di due cifre nel suo quadrato* ; poichè 10, che è il primo numero composto, ha per quadrato 100, che è il primo numero composto di tre cifre. Seguendo questo ragionamento si vede, che *un numero composto di due cifre, non ne può aver più di quattro al suo quadrato* ; perchè 100 primo de' numeri composti di tre, ha per quadrato 10000, primo de' numeri composti di cinque cifre. In generale, *un numero qualunque non può aver al suo quadrato più del doppio delle sue cifre*.

Si estragga la radice quadrata da 625. Poichè questo numero ha tre cifre, la sua radice deve averne due.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{6,25} & 25 \text{ radice} \\ 4 & \\ \hline 2\ 25 & \\ & \end{array}$$

$$\frac{11}{2} = 5$$

$$25 \times 25 = 625$$

Si separi dunque in due membri per mezzo d' una virgola o di un punto, incominciando da destra a sinistra. Questa separazione di membri ciascuno di due cifre, deve farsi sempre nell'estrazione numerica della radi-

radice quadrata, nulla però importando che l' ultimo membro a finiſtra reſti d' una ſola cifra. Si cerchi la radice quadrata del primo membro a finiſtra 6: La più proſſima è 2: ſi metta queſto 2 nel luogo della radice. Si quadri queſta radice, ed il ſuo quadrato 4 ſi ſottragga dal primo membro 6; il reſto è 2. A canto a queſto reſto 2 ſi cali giù l'altro membro 25, e veggaſi quante volte la radice 2 entra nella metà delle due prime cifre 22, cioè in 11. Vi entra 5 volte. Mettaſi dunque 5 nel luogo della radice, e ſi avrà in tutto la radice 25, la quale moltiplicata in sè ſteſſa $25 \times 25 = 625$.

In queſta operazione devonſi oſſervar due coſe come nella diviſione. 1.° Che dopo la prima cifra della radice non ſi deve metterle a canto l'altre, ſe pria non ſi provano per veder ſe ſon troppo grandi, nel qual caſo ſi diminuiſcono. 2.° Che ſe ne' numeri abbaſſati la radice non entra alcuna volta, convien metter zero alla radice; ed abbaſſate l'altre due cifre del membro ſuſſeguente continuar l'operazione.

Eſem-

Esempio.

$\sqrt{10,21,04}$ | radice 319, 53

9

1 21

decimali 10, 21, 04, 00, 00

6 = 2 (3 1021)

31×31=961

6004

34300

1715 = 5 (319)

10210400

3195×3195=10208025

237500

300 = 9 (31)

102104

319×319=101761

343

11875 = 3 (3195)

1021040000

31953×31953=1020994209

45791

La radice proſſima di 10 è 3, il di cui quadrato 9 ſottratto da 10, reſta 1. A fianco di queſto 1 ſi cali il ſecondo membro 21, e neglettane l'ultima cifra 1, ſotto di cui ſi metta un puntino, ſi prenda la metà di 12, cioè 6, e ſi divida per la radice 3, il quoziente è 2. Ma non ſi metta queſto quoziente 2 ſubito nel luogo della radice, perchè $32\times32=1024>1021$. Mettaſi dunque alla radice 1, e ſi avrà $31\times31=961$, che ſottratto da 1021, reſterà 60. A lato di queſto reſto 60 ſi cali giù l'altro membro 04, e negletta l'ultima cifra 4, ſi divida la metà di 600, cioè 300 per 31. Il quoziente è 9, che (fattane la prova) ſi metterà alla radice. Finalmente $319\times319=101761$, che ſottratto

tratto da 102104, resta 343. E siccome non vi sono più membri d'abbassare, devesi conchiudere che la più prossima radice quadrata di 102104 è 319, e che se non vi fosse 343 di troppo, quel numero sarebbe quadrato.

130. Lorchè il calcolo non richiede grand' esattezza, si può nell'estrazione delle radici trascurar l'ultimo resto; ma quando si esigge la maggior esattezza, bisogna cercar le decimali della radice. In tal caso, bisogna aggiunger successivamente ai resti tante volte due zeri, quante decimali si vorranno avere, e si continuerà l'estrazione secondo il metodo prescritto.

Così nel proposto esempio si aggiungan due zeri alla quantità 102104, che diverrà 10210400. Si abbassino questi due zeri a canto al resto 343, e negletta l'ultima cifra, si divida la metà di 3430, cioè 1715 per la radice 319, il quoziente è 5, che si deve metter nel luogo della radice con un punto o virgola avanti come decimale. Si quadri ora tutta la radice $3195 \times 3195 = 10208025$, che sottratto da 10210400, resta 2375.

Se si vogliono più decimali, aggiunganſi alla proposta quantità due altri zeri, e si abbassino questi due zeri a fianco al resto 2375. Veggasi nella metà 23750, cioè in 11875 quante volte entra la radice 3195. Vi entra 3 volte, dunque mettasi 3 alla radice, e $31953 \times 31953 = 1020994209$ sottratto da 1021040000, resta 45791. E così si può proseguir quanto si vuole.

131. Si estrae la radice di una frazione, coll'estrarre quella di ciascuno de' suoi termini. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, perchè $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Ma quando i termini non sono numeri quadrati, bisogna indicarla col segno radicale, o ridurla in decimali.

Estrazione della Radice Cubica.

132. Per concepire l' estrazione della Radice Cubica, convien ricordarsi, che (116) un binomio elevato alla terza potenza è composto del cubo di ciascun termine,

mine, e del triplo prodotto di ciascun termine per il quadrato dell'altro.

Esempio 1.°

$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$	$3a^2$
$-a^3$	$a + b$ radice
$* + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	
$- 3a^2b - 3ab^2 - b^3$	
* * *	

Sia ora proposto di estrarre questa radice cubica.

1.° Si estragga dal primo termine a^3 la radice cubica a, e si metta nel luogo della radice. Si cubi la radice a, ed il suo prodotto a^3 si sottragga dalla prima quantità; il resto sarà . . .
$3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2.° Si quadri la radice a, e si triplichi; ella diverrà $3a^2$. Per questo $3a^2$ si divida il primo termine $3a^2b$ del predetto resto; il quoziente sarà $+b$, che si deve metter a fianco alla radice. Si cubi la radice $a + b$, ed il suo prodotto si sottragga dal resto; non rimane più niente: dunque $a + b$ è la radice cubica cercata.

Esem-

Esempio 2°.

$\sqrt{z^6+6z^5\ 40z^3+96z-64}$	z^2 prima radice di z^6
1a. sott. $-z^6$	
1°. resto $*6z^5-40z^3+96z-64$	$6z^5 : 3z^4 = 2z$ seconda radice
2a. sottr. dalla	z^2+2z elevata alla 2a potenza $z^6+6z^5+12z^4+8z^3$
1a. qu. $-z^6-6z^5-12z^4-8z^3$	
2°. res. $**12z^4-48z^3+96z.64$	$-12z^4 : 3z^4 = -4$ terza radice
3a. sottr. dalla	z^2+2z-4 radice totale elevata alla 3a potenza z^6+6z^5
1a. quant. $z^6-6z^5+40z^3-96z+64$	$-40z^4+96z-64$
* * * * *	

133. L'estrazione della radice cubica de' *numeri* è la stessa che l'Algebraica. Convien però conoscer prima i dieci primi cubi perfetti, che sono

Cubi, 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.
Radici, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Donde si vede, che un numero non può aver al suo cubo più del triplo delle sue cifre; perchè 10 primo de' numeri di due cifre, ha per cubo 1000 primo de' numeri di quattro cifre: 100 primo de' numeri di 3 cifre, ha per cubo 1000000 primo de' numeri di 7 cifre ec.

Sia dato il numero 15625, da cui si abbia ad estrarre la radice cubica.

1° Si ſepari il dato numero in membri di tre cifre l'uno, incominciando dalla deſtra

15, 625 8	25 radice
76 3 = 25 4 = 6	

2°. Si eſtragga dal primo membro 15 la più proſſima radice cubica 2, che ſi deve ſubito porre nel luogo della radice.

3°. Si cubi la radice 2, ed il ſuo cubo 8 ſi ſottragga dal primo membro 15. A fianco al reſto 7 ſi abbaſſi la prima cifra 6 del ſecondo membro 625.

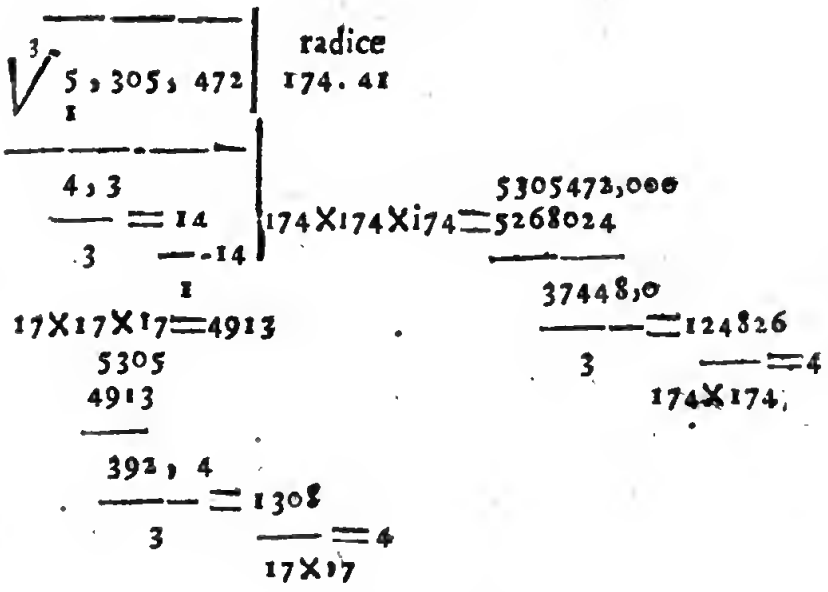
4°. Si quadri la radice 2, il ſuo quadrato è 4. Invece di triplicar queſto quadrato 4, per cui divider il reſto 76, come ſi è fatto Algebraicamente; ſi divida 76 per 3, ed il quoziente 25 dividaſi per il quadrato 4, ſi avrà il quoziente 6.

5°. Queſto quoziente 6 non ſi deve metter alla radice prima di provarlo, e la prova è il cubar la radice 26. Or ſiccome $26 \times 26 \times 26 = 17676 > 15625$, perciò ſi ſcemi 6, e ſi renda 5, e ſi provi. $25 \times 25 \times 25 = 15625$ che è il numero propoſto. Dunque 25 n'è la radice cubica.

Con queſto metodo ſi proſeguirà per qualunque numero compoſto, come ſi vede nel ſecondo eſempio.

Eſem-

Esempio 2°.



La prova della radice cubica è di moltiplicar la radice in sè stessa, ed il prodotto moltiplicarlo per la radice; e si vi è resto, aggiungerlo a questo ultimo prodotto. L'operazione sarà ben fatta, se la somma è ugual al numero proposto.

134. Lorchè un numero non ha radice esatta, è facile accostarvisi quanto più vicino si vuole per mezzo delle decimali, aggiungendo al numero proposto un certo numero di zeri, ed estrarne poi la radice nella maniera ordinaria.

135. Per estrarre la radice maggiore della cubica, come la radice quarta, sesta ec., si può estrarre due volte la quadrata, due volte la cubica ec. Se si ha da estrarre la radice quinta, si estrae prima la cubica, e poi la quadrata, così si evita un grand'imbarazzo di calcolo.

Degl' Incommenſurabili.

136. L'eſpreſſioni delle radici delle quantità, che ſono potenze imperfette, ſi chiaman *incommenſurabili*, *ſorde*, o *irrazionali*. Come $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt[3]{abc}$.

Da $\sqrt{3}$ non può eſtrarſi la vera radice quadrata, poichè non vi è alcun numero che moltiplicato in sè ſteſſo, faccia 3. Perciò $\sqrt{3}$ diceſi *incommenſurabile* come mancaſſe di comune miſura. Quindi ſiegue che i numeri *incommenſurabili* non ſono propriamente numeri. Poichè il numero non eſſendo altro (7) che la ragione d'una certa quantità ad un' altra quantità dello ſteſſo genere, neceſſariamente in ogni ragione o numero deve eſiſtere una parte aliquota, o ſia miſura, comune all' una ed all'altra quantità; or gl' *incommenſurabili* ſon privi di queſta *comune miſura*, dunque $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10}$ ec. non ſono propriamente numeri.

137. Frequentiſſimo è l' incontro di queſti incommenſurabili nelle operazioni Analitiche; convien perciò ſaperli calcolare. Queſto calcolo ſi può far in due maniere, o col laſciar ai termini il ſegno radicale, ed allora ſi chiama *calcolo de' Radicali*; l' altro ſi dice *calcolo delle potenze per i loro eſponenti*, lorchè ai ſegni radicali ſi ſoſtituiſcono eſponenti negativi e frazionarj.

Calcolo de' Radicali.

138. *Riduzione*. Se l'eſpreſſione d' un incommenſurabile è tale, che poſſa eſſer diviſo ſenza reſto per qualche quantità elevata ad una potenza indicata dall' eſponente della radice; allora ſi può ridurre queſta eſpreſſione ad una più ſemplice, ſcrivendo queſta quantità come un coefficiente della radice, e mettendo ſoltanto il quoziente ſotto il ſegno radicale.

Come

Come $\sqrt{a^2b}$ è tale, che a^2 può divider a^2b, si metta dunque $a\sqrt{b}$ invece di $\sqrt{a^2b}$.

Così $\sqrt[3]{432}$ è tale, che 432 può dividersi senza resto per il cubo di 3 che è 27, per il cubo di 6 che è 216, per il cubo di 2 che è 8; perchè $\frac{432}{27} = 16$, $\frac{432}{216} = 2$, $\frac{432}{8} = 54$. Dunque $\sqrt[3]{432}$ può ridursi ad una di queste espressioni equivalenti $3\sqrt[3]{16}$, $6\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt[3]{54}$.

Nella stessa maniera $\frac{\sqrt{b^3d}}{a^2g} = \frac{b\sqrt{bd}}{a\sqrt{g}}$; $\frac{a\sqrt{48c^2d}}{2\sqrt[3]{16dg^4}} =$

$\frac{4ac\sqrt{3d}}{4g\sqrt[3]{2gd}} = \frac{ac\sqrt{3d}}{g\sqrt[3]{2dg}}$ ec.

$\frac{\sqrt{a^3b + 4a^2b^2 + 4ab^3}}{c^2} = \frac{a+2b\sqrt{ab}}{c}$; $\sqrt{\frac{a^2c^2m^2 + 4a^2m^3}{p^2z^2}} =$

$\frac{am\sqrt{c^2 + 4m}}{pz}$ ec.

139. Per far entrar un' espressione qualunque $\frac{p}{q}$ in un radicale qualunque $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ senza cambiarne il valore.

Formola ..... $\frac{ap}{bq}\sqrt[n]{\frac{cq^n}{dp^n}}$, ovvero $\frac{aq}{bp}\sqrt[n]{\frac{cp^n}{dq^n}}$, perchè i numeratori ed i denominatori uguali distruggendosi, $\frac{q^n}{q^n}\frac{p^n}{p^n} = 1$, onde $\frac{aq}{bp}\sqrt[n]{\frac{cp^n}{dq^n}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$.

140. Per toglier il coefficiente $\frac{a}{b}$ dal radicale $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$.

Formola .. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}\frac{c}{d}}^{n}$.

141. Per ridurre in intiero la frazione $\frac{c}{d}$ che è ſotto il ſegno radicale $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$.

Formola $\frac{a}{bd^n}\sqrt[n]{cd^{n-1}}$. Perchè $d^n \times \frac{c}{d}$, ſi ha $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{cd^n}{dd^n}} = \frac{a}{bd}\sqrt[n]{\frac{cd^n}{d}}$: ma $\frac{cd^n}{d} = cd^{n-1}$, dunque $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{a}{bd}\sqrt[n]{cd^{n-1}}$.

142. Per ridurre allo ſteſſo eſponente i due radicali $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, ed $\frac{y}{z}\sqrt[u]{\frac{c}{d}}$.

Formola ... $\frac{p}{q}\sqrt[nn]{\frac{a}{b^u}}$, ed $\frac{y}{z}\sqrt[uu]{\frac{c^n}{d^n}}$.

Quando ve ne ſon molti, ſi riducono ſucceſſivamente due a due.

143. *Addizione*. Nell' addizione e ſottrazione de' radicali non vi è altra difficoltà, che ridurre i termini alle loro più ſemplici eſpreſſioni, e poſcia ſommarli o ſottrarli come quantità commenſurabili.

Le quantità che ſon fuori o avanti il ſegno radicale, fanno lo ſteſſo ufficio de' coefficienti avanti le lettere, onde ſi chiaman anche coefficienti de' radicali. Le *quantità radicali*, o ſotto il ſegno, ſon quelle, che ſtanno a deſtra del ſegno radicale.

Siccome per ſommare e ſottrarre le quantità ſimili, baſta ſommare o ſottrarre i coefficienti, e porre i termini ſimili una ſola volta, lo ſteſſo è de' radicali.

I *radicali ſimili* ſon quelli, che hanno lo ſteſſo ſegno, e le ſteſſe quantità ſotto il ſegno.

Onde per ſommare $\sqrt{48ac^2}$ e $c\sqrt{75a}$, ſi riduca la prima $4c\sqrt{3a}$, e la ſeconda a $5c\sqrt{3a}$, la ſomma ſarà $9c\sqrt{3a}$

Così

Così $\sqrt{ab^3}$ $1\sqrt{a^3b-4a^2b+4ab^3}=a\sqrt{ab}$; $3a\sqrt[4]{\frac{c^2}{2c}+\frac{2c}{2c}}$

$\sqrt[4]{16c^8+32c^4a^4+4c\sqrt{a^4c^4+2a^8}}=$

$10ac\sqrt[4]{c^4+2a^4}$.

144. *Sottrazione*. $\sqrt{48c^3}-\sqrt{\frac{48}{27}c^3}=\frac{38}{9}c\sqrt{3c}$; perchè $\sqrt{48c^3}=4c\sqrt{3c}$, e $-\sqrt{\frac{48}{27}c^3}=-\frac{4}{9}c\sqrt{3c}$; o $4c-\frac{4}{9}c=\frac{32}{9}c$.

$\sqrt[3]{8a^3b+16a^4}-\sqrt[3]{b^4+2ab^3}=2a-b\sqrt[3]{b+2a}$; perchè la prima si cambia in $2a\sqrt[3]{b}-2a$, e la seconda in $b\sqrt[3]{b}+2a$.

145. *Moltiplicazione* e *Divisione*. 1.° Se i moltiplicandi son tutti due incommensurabili, non si ha da far altro, che moltiplicar le quantità che sono sotto il segno, e metter lo stesso segno radicale alla testa del prodotto, e se vi è da farsi riduzione, si faccia.

$\sqrt{ab}\times\sqrt{a^2}=\sqrt{a^2bc}=a\sqrt{bc}$: $\sqrt{3cd}\times\sqrt{4fcg}=\sqrt{12c^2dfg}=2c\sqrt{3fgd}$. Nella divisione $\sqrt{\frac{ab}{a}}=\sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a+x}}=\sqrt{a-x}$.

2.° Se le quantità radicali da moltiplicarsi son uguali, basta toglier semplicemente il segno radicale, e saranno moltiplicate. Come $\sqrt{a^3cd}\times\sqrt{a^3cd}=a^3cd$. Nella divisione $\frac{\sqrt{a^3cd}}{\sqrt{a^3cd}}=1$.

3.° Se la quantità, per cui si ha da moltiplicar un radicale, è commensurabile, si può contentarsi di scriverla avanti il segno, con una sbarra di sopra se è composta di più termini, Come $\overline{a+b} \times \sqrt{\overline{fg}}$, si scrive $\overline{a+b}\sqrt{fg}$. Nella divisione $\sqrt{\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a+x}} = b\sqrt{a-x}$,

$\frac{12ac\sqrt{6bc}}{ac\sqrt{2b}} = 3a\sqrt{3c}$.

Ma se questa quantità commensurabile si vuol far entrare sotto il segno radicale, bisogna prima quadrarla, e poi moltiplicarla per la quantità ch'è sotto il segno. Onde $\overline{a+b} \times \sqrt{f^2g} = \sqrt{\overline{a^2+2ab+b^2} \times f^2g} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}}$

$\sqrt{\frac{\overline{a+b} \times f^2g}{a-b}} = f\sqrt{\frac{ag+bg}{a-b}}$.

4.° Se le quantità da moltiplicarsi son composte di molte altre in parte radicali ed in parte commensurabili, l'operazione farà come le precedenti, purchè si osservino le regole della moltiplicazione delle quantità complesse. Come $(3a\sqrt{bc} - 2b\sqrt{ac}) \times ac\sqrt{ab} = (\sqrt{9a^2ac} - \sqrt{4ab^2c}) \times \sqrt{4abc^2}$, mettendo sotto il segno radicale quel ch'è fuori. Fatta poi la moltiplicazione, farà $(\sqrt{9a^2bc} - \sqrt{4ab^2c}) \times \sqrt{4abc} = \sqrt{36a^3b^2c^3} - \sqrt{16a^3b^3c^3}$; e riducendo $= 6abc\sqrt{ac} - 4abc\sqrt{bc}$.

Così

Così $a+\sqrt{a^2-b^2}\times a+\sqrt{a^2-b^2}=2a^2-b^2+2a\sqrt{a^2-b^2}$; e $a+\sqrt{a^2-x^2}\times a-\sqrt{a^2-x^2}=x^2$.

Sia $\sqrt[3]{a^2b^2+b^4}$ diviso per $\frac{\sqrt[3]{a^2-b^2}}{8b}$, il quoziente è $\sqrt[3]{\frac{8a^2b^2+8b^4}{a^2-b^2}}=\frac{2b\sqrt[3]{a^2+b^2}}{a^2-b^2}$.

3.° Se i radicali hanno diverso esponente, bisogna ridurli allo stesso esponente (142), e poi far la moltiplicazione.

Così $\sqrt[3]{ab}\times\sqrt[5]{ab^2}=\sqrt[15]{a^5b^5}\times\sqrt[15]{a^3b^6}=\sqrt[15]{a^8b^{11}}$. E $\sqrt[3]{a^2b^4}\times\sqrt[6]{a^4b^5}=\sqrt[6]{a^4b^8}\times\sqrt[6]{a^{12}b^{15}}=\sqrt[6]{a^{16}b^{23}}=a^2b^3\sqrt[6]{a^4b^5}$. Lo stesso può farsi in numeri. Come $\frac{\sqrt[4]{2-c}}{3ad}\times\frac{1}{3}\sqrt[4]{a^2+c^2}=\frac{4}{3}\frac{\sqrt[8]{2-c\times a^2+b^2}}{81a^4d^4}$.

Se si avesse da dividere $\sqrt[3]{ab}$ per $\sqrt[5]{ab^2}$, il quoziente sarebbe $\frac{\sqrt[15]{a^5b^5}}{\sqrt[15]{a^3b^6}}=\frac{\sqrt[15]{a^2}}{b}$; $\frac{p}{q}\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ diviso per $\frac{y}{z}\sqrt[u]{\frac{c}{d}}=\frac{pz}{qy}\sqrt[nu]{\frac{a^ud^n}{bu^cn}}$.

Se

Se si vuol dividere $4\sqrt{5}$ per $\frac{\sqrt{3}}{7} = \frac{4\sqrt[4]{5^2 \times 7^2}}{3^2} =$

$\frac{4\sqrt[4]{1225}}{9} = \frac{4\sqrt{35}}{3}$.

146. *Elevazione d'un radicale*. Sia per esempio, questo radicale $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ da elevarsi a qualunque potenza $\frac{u}{s}$.

1.° Si metta la frazione $\frac{a}{b}$ sotto il radicale $\sqrt[n]{\ }$, si avrà (140) $\sqrt[n]{\frac{a^n c}{b^n d}}$.

2.° Si liberi $\sqrt[n]{\frac{a^n c}{b^n d}}$ del segno $\sqrt[n]{\ }$, si ha (123) $\frac{a^n c^{\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{1}}}{b^{n\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{1}} d^{n\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{1}}}$.

3.° Si elevi quest'ultima frazione alla potenza $\frac{u}{s}$ (113), e si ha $\frac{a^{\frac{nu}{ns}\cdot\frac{u}{u}} c^{\frac{nu}{ns}\cdot\frac{u}{u}}}{b^{\frac{nu}{ns}\cdot\frac{u}{u}} d^{\frac{nu}{ns}\cdot\frac{u}{u}}}$

4.°

4.° Si rimetta quest' ultima frazione sotto il segno radicale (123), e si ha $\sqrt[\frac{ns}{n}]{\frac{a^n c}{b^n d}}$.

147. *Estrazione d'una radice qualunque da un radicale.* Volendo estrarre la radice $\frac{n}{s}$ da $\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$.

1.° Si metta $\frac{a}{b}$ sotto il segno $\sqrt[n]{}$ (140), si avrà

$$\sqrt[n]{\frac{a^n c}{b^n d}}$$

2.° Tolgasi il segno $\sqrt[n]{}$ (123), si ha $\frac{a^n c^n}{b^n d^n}$.

3.° Si estragga da quest' ultima frazione la radice $\frac{u}{s}$, si ha (123) $\frac{a^{nu} c^{nu}}{b^{nu} d^{nu}}$

4.° Si rimetta sotto il segno radicale quest' ultima frazione, e si ha (123) $\sqrt[\frac{nu}{s}]{\frac{a^n c}{b^n d}}$

Sia

Sia, per esempio, da estrarsi la radice quadrata da $3-2\sqrt{2}$. Suppongasi $x-\sqrt{y}$ la radice cercata. Dunque $x^2+y-2x\sqrt{y}=3-2\sqrt{2}$; e facendo le parti razionali uguali alle razionali, e le irrazionali alle irrazionali, si avrà $x^2+y=3$, e $x\sqrt{y}=\sqrt{2}$; da dove si trae $x^2=\frac{2}{y}$, e $\frac{2}{y}+y=3$; dunque $y^2-3y=-2$, e $y=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}=1$, o 2; dunque $x^2=1$, o 2; dunque $1-\sqrt{2}$, o $\sqrt{2}-1$ è la quantità cercata.

Calcolo delle Potenze per i loro esponenti.

148. Si è veduto (123) che per estrarre la radice da una qualsivoglia quantità, non si ha che dividere per l'esponente della radice gli esponenti di ciascuna delle lettere componenti essa quantità; come $\sqrt[n]{m}=a^{\frac{m}{n}}$; $\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2$.

Si possono dunque sbandire dal calcolo i segni radicali, per lo più molto imbarrazzanti, e trattar le grandezze che ne son affette, come potenze, delle quali gli esponenti sieno numeri rotti.

149. Per *sommarli*, bisogna unirli co' loro segni.

Come a^n ed $a^{-m}=a^n+a^{\frac{1}{m}}$; a^n e $b^{-m}=a^n+b^{-m}$.

150. Per *sottrarli*, bisogna cambiar i segni de' coefficienti, ma non degli esponenti. Se da a^n si vuol sottrarre $a^{\frac{1}{m}}$, la differenza è $a^n-a^{\frac{1}{m}}$; e se da a^n si sottrae b^{-m}, il resto è a^n-b^{-m}.

151. *Moltipl.* Per moltiplicare le due quantità $a^{\frac{r}{n}}b^{\frac{r}{n}}$ per $a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}$, bisogna aggiunger (come si fa in tutte le moltiplicazioni delle quantità incomplesse) gli

Espo-

esponenti delle stesse lettere; cioè $\frac{p}{m}$ con $\frac{r}{n}$, ed $\frac{s}{n}$ con $\frac{q}{m}$;

onde si avrà $a^{\frac{p}{m}+\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}+\frac{q}{m}}$, e mettendo tutto allo stesso denominatore $a^{\frac{pn+mr}{mn}} b^{\frac{sm+nq}{mn}}$.

152 *Divisione*. Per dividere bisogna sottrarre gli esponenti dalle stesse lettere. Come $a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}} : a^{\frac{r}{n}} b^{\frac{s}{n}} = a^{\frac{p}{m}-\frac{r}{n}} b^{\frac{q}{m}-\frac{s}{n}}$, e mettendo allo stesso denominatore $a^{\frac{pn-mr}{mn}} b^{\frac{qn-ms}{mn}}$.

153. *Elevazione*. Per elevar $a^{\frac{n}{m}}$ alla potenza p, non si ha che moltiplicar p per l' esponente n, e si avrà $a^{\frac{nxp}{m}} = a^{\frac{np}{m}}$.

154. *Estrazione*. Per estrarre la radice r da $a^{\frac{n}{m}}$, convien moltiplicare r per m, onde si ha $a^{\frac{n}{mr}}$.

155. Il grand' uso di queste espressioni nell' Analisi esige per maggior intelligenza una breve ricapitolazione.

1°. Ogni quantità $\sqrt[m]{a^n}$ si riduce ad una potenza frazionaria $a^{\frac{n}{m}}$.

2°. Se una quantità ha un esponente negativo a^{-m} (120), può cangiarsi in una frazione, di cui il numeratore è l' unità, ed il denominatore è la stessa quantità con un esponente ugual al proposto, ma col segno +. Vale a dire $a^{-m} = a^{\frac{1}{m}}$.

3°. Ogni quantità, di cui l' esponente è zero, si riduce all' unità, cioè $a^0 = 1$ (120).

Ecco

Ecco alquanti esempj per più facilitarne la pratica.

$\frac{a^2b^{-3}}{ca^{-1}} = a^1b^{-1}c^{-1} = \frac{a^1}{b^1c}$; $\frac{\sqrt{a^{-2}b^2}}{ab^{-1}} = \sqrt{a^{-3}b^1} = \sqrt{\frac{b^1}{a^3}} = b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{3}{2}}$

$a^{\frac{1}{2}}\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b^{-1}}}{\sqrt{a^2}} = a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} = a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}$;

$a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}b\sqrt{b}\sqrt[3]{a}$.

$\frac{\sqrt{b}-c^5 \times \sqrt[4]{ac^3}}{\sqrt{\frac{ab^2}{c}}} = a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{3}}a^{\frac{2}{4}}c^{\frac{3}{4}}a^{-\frac{1}{2}}b^{-1}c +$

$\frac{1}{3} = a^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{3} - 1\, c^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$

$= a^{\frac{5}{12}}b^{-\frac{4}{3}}c^{\frac{35}{12}} = \frac{a^{\frac{5}{12}}c^{\frac{35}{12}}}{b^{\frac{4}{3}}} = \frac{\sqrt[12]{a^5c^{15}}}{\sqrt[3]{b^4}} = \frac{c^2\sqrt[12]{a^5c^{11}}}{b\sqrt[3]{b}}$.

Riflessioni sopra l'oggetto e l'essenza dell'Algebra.

256. Che cosa è l'Algebra? Alcuni han detto ch' *è l'arte di fare sulle lettere dell' alfabeto le stesse operazioni, che si fanno sulle cifre*. Definizione ridicola per tutti i versi. Altri la definiscono, *Scienza del calcolo delle grandezze in generale*; definizione più esatta, ma bisognosa di sviluppamento.

157. Per aver un'idea distinta dell'Algebra, bisogna prima di tutto stabilire questo principio, *Che il Calcolo delle grandezze non può consistere che a determinar il rapporto delle grandezze fra loro*.

Or vi sono due specie di rapporti. Gli uni possono esser esattamente espressi da numeri intieri o rotti.

Gli

Gli altri, che si chiaman incommensurabili, non possono esser espressi da numeri se non che in una maniera approssimante: ma possono però esser rappresentati, o immaginarsi che lo sieno, in un' altra maniera, per esempio, per mezzo de' rapporti d'una linea verso un' altra.

158. Di più. L'Aritmetica Ordinaria ha due sorte di principj. Gli uni son dipendenti dai segni o cifre, colle quali si esprimon i numeri. Son questi principj che si chiaman propriamente regole dell' Aritmetica. Regole che son attaccate alla natura di questi segni: così che elleno sarebbero ben differenti, se invece di dieci segni, de' quali ci serviamo per esprimer tutti i numeri possibili, ne avessimo maggiore o minor numero, o se li disponessimo altrimenti.

159. Gli altri principj, su quali son fondate le regole Aritmetiche, sono più generali, sono indipendenti dalle cifre, colle quali si possono esprimer i numeri, e son unicamente attaccati alla natura stessa de' numeri, Come

1.° Se da un maggior numero si toglie un minore, ed a questo minore si aggiunge la loro differenza, si avrà il numero maggiore.

2.° Il prodotto di due numeri diviso per uno de' due fattori, dà l'altro fattore.

3.° Il prodotto del quoziente per il divisore è ugual al dividendo.

Tali principj sono proprietà generali de' numeri, di qualunque specie e di qualunque maniera essi numeri sieno disegnati. Dunque tali principj possono esser posti sotto gli occhi nella più chiara e più semplice maniera per mezzo di caratteri generali. Perciò per esprimerli si sono scelte le lettere dell' alfabeto, come le più note, e d' un uso il più familiare ed universale.

160. Dunque l' Algebra serve

1.° A rappresentare e dimostrare in una maniera semplice e facile le verità, che han relazione alle proprietà de' numeri. 1.ª utilità.

2.° Sic-

rebbero con più o meno o con quante cifre come la nostra, ed a presentare sotto la forma la più semplice e compendiosa quelle operazioni aritmetiche indicate.

162. Per maggiormente conoscere l'utilità e l'oggetto dell'Algebra, convien osservare, che le quistioni che si possono proporre sopra i numeri, non sono tutte così semplici come le quattro operazioni ordinarie aritmetiche. Vi sono quistioni molto più complicate, per la soluzione delle quali convien fare delle combinazioni, nelle quali devon entrar i numeri che si cercano. Ci vuol dunque un' arte per fare queste combinazioni senza conoscer il numero che si cerca. Perciò bisogna esprimer questi numeri con caratteri differenti da caratteri numerici; poichè sarebbe un grandissimo inconveniente esprimer un numero ignoto con carattere numerico, che senza una gran casualità non potrebbe convenirgli.

Si cerchino, per esempio, *due numeri, de' quali la somma sia* 100, *e la differenza* 60. Se si disegnano i due numeri incogniti con caratteri numerici presi ad arbitrio, per esempio, l'uno 25, l'altro 50, si dà loro una falsissima espressione, poichè 25 e 50 non adempiono le condizioni del problema.

Per evitare questo inconveniente, il maggiore di questi numeri incogniti si chiami x, ed il minore y. Con questa denominazione algebraica si ha $x+y=100$, e $x-y=60$; onde $x+y+x-y=100+60$, cioè $2x=160$: dunque $x=80$, e $y=20$.

163. Quindi si vede che l'oggetto e la massima utilità dell'Algebra è, *che per mezzo delle generalità de' caratteri si possono esprimer le condizioni supposte tra' numeri dati ed i numeri incogniti, e praticar le operazioni ugualmente su gli uni che su gli altri, per indi liberare gl' incogniti dai dati, e finalmente conoscerli relativamente alle condizioni proposte.*

164. L'espressione algebraica d' un problema non è altro, come l' ha ben osservato Newton, che la traduzione dello stesso problema in caratteri algebraici.

Il comodo e l' essenziale di questa traduzione si ri-

duce a metter nel problema quel ch' è assolutamente necessario, ed a bandirne le condizioni superflue. Eccone un esempio.

Problema enunciato in linguaggio ordinario.	Lo stesso Problema tradotto algebraicamente.
Si chieggono due età con queste condizioni.	x, y.
Che la loro somma sia 100	$x+y=100$
E che la loro differenza sia 30	$x-y=30$

Onde la quistione si riduce a trovar le due incognite x, y.

165. Da ciò si rileva, che l' *Aritmetica Universale* ha due parti.

La prima è quella, che insegna a far le combinazioni ed il calcolo delle quantità rappresentate da' segni più universali di quel che non son i numeri; in maniera che le quantità incognite, cioè quelle delle quali s'ignora il valor numerico, possono esser combinate colla stessa facilità che le quantità date (cioè quelle alle quali si può assegnar un valor numerico).

Queste operazioni non suppongono che le proprietà generali della quantità, vale a dire vi si considera la quantità semplicemente come quantità, e non come rappresentata e fissata da tale o tal espressione particolare. Questa è quella che propriamente si chiama Algebra, di cui si è trattato in questo capitolo.

La seconda parte dell'*Aritmetica universale* consiste a saper far uso della prima parte (cioè del metodo generale di calcolar le quantità), affin di scoprire per mezzo delle quantità note le quantità incognite che si cercano. Questa seconda parte si chiama propriamente *Analisi*, di cui si va a trattare nel capitolo seguente. Ma siccome ella è la parte principale e più estesa, cui l'Algebra è diretta, se le dà spesso a dirittura il nome d'Algebra.

CA-

CAPITOLO II.

Dell' Analisi.

166. L'Analisi è l' arte di sciogliere per mezzo del calcolo Algebraico tutti i problemi che si possan proporre sulle grandezze.

167. *Proporre un Problema*, è domandare che si trovi il valore d'una o più grandezze. Sarà impossibile trovar questo valore, se nel proposto problema non si assegna qualche rapporto tralle quantità incognite e le cognite, le quali si chiaman i *dati del problema*.

168. Ciascuno de' rapporti assegnato tra i dati e le incognite, si chiama *una condizione del problema*; perchè questi rapporti esprimon la condizione per cui vi è uguaglianza fralle incognite ed i dati.

169. L'espressione algebraica d'una condizione d'un problema si chiama *equazione*.

Dell' Equazione.

170. L'*Equazione* è dunque una unione di termini Algebraici composti di quantità cognite ed incognite, unite col segno $=$

171. Si usa esprimer *le date* colle prime lettere minuscole dell' Alfabeto, e le *incognite* colle ultime x, y, z. Così distinguonsi a prima vista l'une dall'altre.

172. Tutti i termini che son a sinistra del segno $=$, forman *il primo membro dell'equazione*, e tutti gli altri che son a destra ne forman il 2°. *membro*.

173. Dicesi *equazione del primo grado*, se l' incognita è alla sua prima potenza, come $x+a=b$. Del 2°. *grado*, se l'incognita è alla sua 2ª. potenza. Del 3°. *grado*, se ella è alla 3ª. potenza ec.

174. *Risolver un problema*, è trovar il valore di ciascuna incognita richiesta; o provare che sia impossibile di trovarlo, il che accade lorchè i rapporti dati implicano qualche contradizione.

175. *Trovar il valore d'una incognita*, è farla restar sola in un membro dell'equazione, e l'altro membro far che sia composto di quantità tutte cognite.

176. Possono l'equazioni riguardarsi in due aspetti; o come ultime conclusioni alle quali si arriva nella soluzione de' problemi, lorchè l'incognita è rimasta sola ed eguale a quantità tutte note, ed in tal caso possono queste equazioni dirsi *finali*, o come mezzi, per i quali si giunge alla soluzione finale, e tali equazioni dir si possono *mediate*. L' equazioni mediate racchiudono più incognite che devon esser paragonate e combinate insieme, finchè si giunga ad una nuova equazione, che non contenga più che una sola incognita mista con cognite.

177. Per trovare il valore delle incognite d'un problema, o sia per giunger all'equazioni *finali*, bisogna fare successivamente sopra ciascuna equazione *mediata* diverse operazioni secondo lo stato in cui sono esse incognite. Queste operazioni sono la Trasposizione, la Divisione, la Moltiplicazione, l'Estrazione delle radici, la Sostituzione, e la Proporzione.

Trasposizione.

178. Consiste questa operazione a trasportar un termine da uno in un altro membro dell'equazione; senza però che l' uguaglianza fra essi membri sia punto cangiata. Per effettuar ciò, si tolga questo termine dal membro dov'è, e con un segno contrario si trasporti nell' altro membro.

Sia $ac+x=b$. Per trasportar il termine ac, si sottragga dall'uno e l'altro membro, e si avrà $ac+x-ac=b=ac$, e riducendo $x=b-ac$. E' chiaro, che quest' ultima equazione non ha valore differente dalla prima.

179. Si può dunque per la trasposizione render positivo un termine negativo, e reciprocamente.

180. E si può prender il valore d' un termine qualunque, col lasciarlo solo in un membro.

Di-

Divisione.

181. Serve questa a liberar una incognita dalle cognite colle quali ella è moltiplicata, senza che il valore dell'equazione sia punto alterato. Se nell'equazione $bx-ac=d-cd$, si vuol liberar x da b, convien divider per b tutti gli altri termini, si avrà $\frac{bx}{b}-\frac{ac}{b}=\frac{d}{b}-\frac{cd}{b}$; o $x-\frac{ac}{b}=\frac{d}{b}-\frac{cd}{b}$.

Così $ax-bx+3x=d$ per mezzo della divisione diviene $x=\frac{d}{a-b+3}$.

$ax-x=b$ diviene $x=\frac{b}{a-1}$.

$ab^2-bx^2=bd$ diviene $\frac{ab^2-bx^2}{b}=\frac{bd}{b}$; o $ab-x^2=\frac{d}{b}$.

Dunque per liberar un' incognita da una o più cognite colle quali ella è moltiplicata, bisogna divider gli altri termini per quelle cognite.

Per mezzo della divisione dunque si rende l'equazione più semplice; il che sempre è da procurarsi.

Moltiplicazione.

182. Questa serve, per fare svanire le frazioni che trovansi nell'equazioni, senza però cambiarsi l'uguaglianza de' membri. Se nell'equazione $a+\frac{bx}{x}=dx$, si vuol fare svanire il denominatore x, convien moltiplicarlo

per gli altri termini, e si avrà $ax + \frac{bx}{x} = dx^2$, ovvero $ax + b = dx^2$.

$\frac{a}{x} + \frac{b}{b} = abc - bcd$ diviene $ab + x^2 = ab^2cx - b^2cdx$.

Dunque per fare svanire le frazioni d' un' equazione, devesi moltiplicare ciascun denominatore per gli altri termini.

Estrazione della Radice.

183. Se s' incontra l'incognita sotto il segno radicale, tolgasi questo radicale, e l'altro membro dell'equazione s' innalzi ad una potenza indicata dallo stesso radicale.

Per esempio, $\sqrt{ax+b^2} - c = d$, diverrà trasponendo $\sqrt{ax+b^2} = c+d$, e facendo svanir il radicale diverrà $ax + b^2 = c + d^2$, o $ax + b^2 = c^2 + 2cd + d^2$, e trasponendo e dividendo sarà $x = \frac{c^2+2cd+d^2-b^2}{a}$.

Nell' equazioni del secondo grado e di altri grad superiori si vedrà a suo luogo quali altri metodi richieggonsi per l'estrazione delle radici.

Sostituzione.

184. Questa operazione consiste in mettere nell'equazione invece d' una certa quantità un' altra dello stesso valore. Se $3x+v=a$, ed $y=b$, sostituendo nella prima equazione b ad y, ella diverrà $3x+b=a$, o $x = \frac{a-b}{3}$.

La

La ſoſtituzione dunque ſerve per fare ſvanire le incognite nell' equazioni mediate. Sieno queſte due equazioni

$x+y=a$ divengono $x=a-y$
$x-y=b$ per la traſpoſizione $x=b+y$
dunque $a-y=b+y$; e traſponendo ſarà $2y=a-b$, o
$y=\frac{a-b}{2}$

Ecco ſvanito l'x. Collo ſteſſo metodo ſi può fare ſvanire l'y , e quante altre incognite mai vi foſſero in altrettante equazioni.

Proporzione.

185. Ogni proporzione geometrica può convertirſi in equazione , col far il prodotto degli eſtremi ugual al prodotto de' mezzi. Onde poſta queſta proporzione a : b :: c : d, vi ſarà queſta equazione $ad=bc$.

186. Reciprocamente ogni equazione può ridurſi in proporzione geometrica; come $ad=bc$ diviene a : b :: c : d.

187. Nella ſteſſa guiſa ogni proporzione Aritmetica divien equazione, col far la ſomma degli eſtremi ugual alla ſomma de' mezzi. Così a.b:c.d, diviene $a+d=b+c$. E reciprocamente.

Riſoluzione de' Problemi.

188. Per riſolver un problema , biſogna

1°. Conſiderar attentamente lo ſtato della quiſtione, diſtinguerne le condizioni , e le cognite dalle incognite.

2°. Eſprimer il problema in una maniera aſtratta e generale per mezzo di lettere ; impiegandone meno che ſia poſſibile. Non ſi deve perciò diſegnare con lettere differenti le quantità uguali , o le parti delle

quantità uguali, ma con una sola stessa lettera esprimer (se occorre) i denominatori, o i coefficienti.

3°. Esprimer ciascuna condizione del problema con una equazione.

4°. In una soluzione completa devon esser tante l' equazioni, quante sono le incognite, ed in tal caso il problema dicesi *determinato*, cioè non ammette che un numero limitato di soluzioni. Se poi vi sono meno incognite che equazioni, il *problema è più che determinato*, e talvolta si scuopre d' impossibile soluzione per le contradizioni che si trovano nell' equazioni. Finalmente se sono più le incognite che l' equazioni, dicesi *problema indeterminato*, e può aver un' infinità di soluzioni; e sarà *più che indeterminato* quanto il numero delle incognite è maggiore rispetto a quello dell' equazioni.

5°. Trovare per mezzo delle regole prescritte il valore di ciascuna delle incognite.

189. Da tutto ciò siegue, che *la preparazione d' un problema* consiste principalmente in esaminare se le proposizioni o parole, nelle quali il problema è espresso, possan esser espresse in termini Algebraici, come noi esprimiamo le nostre idee ordinarie in caratteri Greci, Latini, o Italiani. Se ciò può farsi, come generalmente si può far in tutte le quistioni, che si fanno su i numeri e sulle quantità astratte, in tal caso bisogna dar de' nomi alle quantità cognite ed incognite secondo la quistione lo esige, e tradurre così in linguaggio Algebraico il senso della quistione. Queste condizioni così tradotte daran tante equazioni, quante il problema può darne.

Equazioni del primo grado.

Problema primo.

190. *Un padre ed un figlio han fra tutti due* 100 *anni, il figlio ne ha* 30 *meno del padre. Qual è l' età di ciascheduno?*

Qui

Qui vi ſono due quantità date, cioè 100, e 30; e due incognite, l'età del padre e quella del figlio. Le due condizioni ſono, che la ſomma delle due età incognite ſia 100, e la loro differenza 30. Biſogna dunque eſprimerle con due equazioni; e ſupponendo $100 = a$, $30 = b$, l'età del padre $= x$, l'età del figlio $= y$, ſi riduce il problema a queſta quiſtione generale: *Data la ſomma e la differenza di due quantità trovar ciaſcuna quantità:* e ſi eſprime così

Problema.

Eſpreſſo in parole	Eſpreſſo Algebraicamente.
Si domandano due età	x, y ?
di cui la ſomma è $100 = a$	$x + y = a$
e di cui la differenza è $30 = b$	$x - y = b$

Si hanno dunque le due equazioni $x + y = a$, $x - y = b$, nelle quali vi ſono due incognite. Or per aver il valore di queſte incognite, conviene (184) farne ſvanir una. Dunque ſe $\begin{matrix} x + y = a \\ x - y = b \end{matrix}$ faranno $\begin{matrix} x = a - y \\ x = b + y \end{matrix}$, e $a - y = b + y$, o $2y = a - b$, o $y = \frac{a-b}{2}$, cioè $y = \frac{100-30}{2} = 35$. Nella ſteſſa guiſa ſi poteva far anche ſvanire y, poichè ſe $\begin{matrix} x + y = a \\ x - y = b \end{matrix}$ faranno $\begin{matrix} y = a - x \\ y = x - b \end{matrix}$, dunque $a - x = x - b$, o $2x = a + b$, o $x = \frac{a+b}{2} = \frac{100+30}{2} = 65$.

Dunque l'età del padre ſarà di 65, e quella del figlio di 35 anni.

191. Poichè queſta quiſtione particolare è ſtata ridotta ad una quiſtione generale, ne ſiegue che l'equazioni

zioni $x = \frac{a+b}{2}$, e $y = \frac{a-b}{2}$ danno una soluzione generale; perchè queste lettere rappresentando tutti i numeri possibili, ogni volta che si proporrà di trovare due quantità x ed y, delle quali si conosca la somma a e la differenza b, si vedrà che la maggiore di queste quantità, disegnata qui da x, sarà ugual alla metà della somma $a + b$ di due quantità date; e che la più piccola (espressa da y) sarà ugual alla metà della differenza $a-b$ di queste due quantità date.

192. L' equazioni che danno la soluzione generale d'un problema, si chiaman *Formole*: elle rappresentan un metodo generale di risolvere tutti i problemi possibili che abbiano le stesse condizioni di quello che si è risoluto colle stesse equazioni. La Formola è dunque *un risultato generale tirato da un calcolo Algebraico, e rinchiude un' infinità di casi*, così che non si ha da far altro che sostituire de' numeri particolari alle lettere, per trovar il risultato particolare di qualunque caso si proponga. Ella è di un metodo facile per operare, e se si può renderla assolutamente generale, è di un massimo vantaggio, poichè spesso tutta una scienza si riduce ad una sola linea. Ma affinchè la formola abbia un tal vantaggio, bisogna che per trovarla, s'incontri assai più difficoltà che a scioglier un problema particolare.

Se per esempio si propone questo problema: *Pietro e Giovanni han dato insieme* 14 *soldi a' poveri; Pietro ne ha dato* 4 *di più che Giovanni; quanti ne ha dato ciascuno?*

E' chiaro che questo problema ha le stesse condizioni del precedente, poichè vi si cercan due quantità, di cui si conosce la somma 14, e la differenza 4.

Dunque $x = \frac{a+b}{2} = \frac{14}{2} = 9$; ed $y = \frac{a-b}{2} = \frac{14-4}{2} = 5$.

Dunque Pietro ha dato 9 soldi, e Giovanni 5.

193. Una formola dunque espressa in parole dà una rego-

regola generale. Come le formole $x = \frac{a+b}{2}$ $y = \frac{a-b}{2}$, che ſono lo ſteſſo che $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, danno queſta regola generale o Teorema: *Quando ſi conoſce la ſomma e la differenza di due quantità incognite, per aver la più grande biſogna aggiunger la metà della differenza alla metà della ſomma; e per la più piccola biſogna togliere la metà della differenza dalla metà della ſomma*. Queſta propoſizione può anche enunciarſi così:

Di due quantità inuguali, la più grande è ugual alla metà della loro ſomma più la metà della loro differenza: E la più piccola è ugual alla metà della loro ſomma meno la metà della loro differenza.

194. Da tutto ciò riſulta, che per riſolver i problemi che ſi propongono ſopra i numeri o ſulle quantità aſtratte, non ſi ha da far quaſi altro che tradurli dal linguaggio ordinario in linguaggio algebraico, cioè in caratteri proprj da eſprimer le noſtre idee ſu i rapporti delle quantità. Può darſi talvolta, che il diſcorſo in cui il problema è propoſto, non poſſa eſſer eſpreſſo algebraicamente; ma col farvi qualche piccolo cangiamento, ed avendo principalmente riguardo più al ſenſo che alle parole, la traduzione diverrà ben facile: la difficoltà che può incontrarſi in queſta traduzione, vien unicamente dalla differenza degli idiomi, come nelle traduzioni ordinarie.

Problema 2°.

Pietro e Gio: avendo inſieme 36 ſcudi, ne han perduto inſieme 10 al giuoco. Pietro ha perduto il terzo di quel che avea, e Gio: il quinto. Si domanda quanto ciaſcuno avea avanti il giuoco, e quanto ciaſcuno vi ha perduto.

Sembra a prima viſta che qui vi ſieno quattro incognite,

gnite, ma realmente non ve ne ſono che due. Perchè quando ſi conoſcerà quel che Pietro avea prima del giuoco, il $\frac{1}{3}$ di queſta ſomma ſarà la ſua perdita, la quale per conſeguenza non è un' incognita. Lo ſteſſo è della perdita di Giovanni.

195. Quindi ſi può inferire: *che il numero delle incognite non dipende dal numero delle domande che ſi fanno in un problema; ma biſogna vedere prima di determinar il numero delle domande, ſe la ſoluzione d' una domanda dà la ſoluzione dell' altra.*

Problema.

Eſpreſſo in parole	eſpreſſo algebraicamente
Si domandano due quantità .. di cui la ſomma è $36=a$	x, y^2. $x+y=a$ prima equazione
e di cui il $\frac{1}{3}$ della prima, più il $\frac{1}{5}$ della ſeconda, è $10=b$	$\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=b$. 2.ª equazione

Si facciano ſvanire nella ſeconda equazione i denominatori, ella diverrà $5x+3y=15b$; e dividendo e permutando ſarà $x=3b-\frac{3y}{5}$.

e la prima ſarà ... $x=a-y$, dunque $a-y=3b-\frac{3y}{5}$; e facendo ſparir il denominatore, ſarà $5a-5y=15b-3y$, e permutando $2y=5a-15b$, e dividendo ſarà $y=\frac{5a-15b}{2}=\frac{180-150}{2}=15$.

Dunque $x=a-y=36-15=21$.

Dunque Pietro avea 21, e ne ha perduto 7, che è il $\frac{1}{3}$ di 21: e Giovanni avea 15, ed ha perduto 3, che è il $\frac{1}{5}$ di 15. E ſon vere tutte le condizioni, $21+15=36$, $7+3=10$.

Pro-

Problema 3.°

Un Padre lascia in suo testamento il suo asse da dividersi tra suoi figli con queste condizioni, che il primogenito si prenda 1000 *scudi, ed il* $\frac{1}{6}$ *di quel che resterà dopo levata quella somma; che il* 2.° *si prenda* 2000 *scudi con il* $\frac{1}{6}$ *del resto; il* 3.° 3000 *con il* $\frac{1}{6}$ *del resto; e così gli altri fin all' ultimo, il qual avrà quel ch'è avanzato a suoi fratelli. Eseguita questa bella disposizione, si trova che ciascuno ha avuto parte uguale. Or si domanda, quanti figli erano? Quanto ha ciascuno avuto? quanto il padre ha lasciato?*

Benchè le domande sien tre, l'incognita non è che una, cioè il bene del padre.

Sia questo $= x$, gli scudi 1000 $= a$. Dunque la porzione del primogenito sarà $a + \frac{x-a}{6}$, che ridotta tutta in frazione sarà $\frac{6a+x-a}{6}$, o $\frac{5a+x}{6}$; e sottratta da tutto il bene x, il resto sarà $x - \frac{5a-x}{6}$,

ovvero $\frac{5x-5a}{6}$,

Da questo resto il secondo figlio deve prender prima $2a$, onde resterà $\frac{5x-5a}{6} - 2a = \frac{5x-17a}{6}$, e poi $\frac{1}{6}$; sicchè $\frac{5x-17a}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5x-17a}{36}$.

Dun-

Dunque la porzione del ſecondo figlio è $2a + \frac{5x - 17a}{36} = \frac{55a + 5x}{36}$.

E poichè le porzioni ſi ſono trovate uguali, ſarà $\frac{5a + x}{6} = \frac{55a + 5x}{36}$; e togliendo le frazioni, traſportando e riducendo, ſi ha $6x = 150a$, e dividendo $x = 25a = 25000$.

Dunque il bene del padre è 25000 ſcudi, e ciaſcuno ne ha avuto 5000: onde i figli ſono cinque.

Problema 4.°

Trovar tre numeri x, y, z, de' quali la ſomma ſia 105, *e la loro differenza ſia la ſteſſa.*

Le condizioni di queſto problema non poſſon eſprimerſi che con queſte due equazioni, $x + y + z = 105$, $x - y = y - z$.

Queſto è dunque un problema *indeterminato*, perchè il numero delle incognite è maggiore del numero delle condizioni, ed in conſeguenza dell'equazioni.

Non ſi può queſto problema riſolvere colle regole precedenti, perchè rimarranno nell'equazioni ſempre due incognite.

1.ª equaz. $x + y + z = 105$, o $x = 105 - y - z$
2.ª equaz. $x - y = y - z$, $x = 2y - z$

dunque $2y - z = 105 - y - z$, o $3y = 105$, o $y = \frac{105}{3} = 35$. Soſtituendo il valore di y nella prima equazione, ſi avrà $x + 35 + z = 105$, ovvero $x + z = 105 - 37 = 70$; nella qual equazione non può farſi ſvanire nè z, nè x.

Convien dunque ſupporre qualche valore ad una di queſte due incognite, per conoſcer quello dell'altra. Suppongaſi $x = 10$, ecco ſubito $z = 60$; ed i tre numeri richieſti ſaranno 10, 35, 60, i quali ſciolgon il problema. Se poi ſi faceſse $x = 12$, ſarebbe $z = 58$, ed

ed i tre numeri sarebbero 12, 35, 58, i quali ugualmente sciolgono la quistione.

Quindi si vede, che questo problema può aver 69 soluzioni in numeri intieri e positivi, perchè può supporsi x uguale successivamente a tutti i numeri da 1 fin a 69, ma non al di là, perchè la somma delle due incognite è 70. Può aver però un' infinità di soluzioni, se si suppone x ugual a qualunque numero minore di 70 con qualsisia frazione.

196. Vi son certi problemi, i quali sono determinati, benchè racchiudano meno equazioni che incognite.

Sieno 40 scudi da ripartirsi a 20 persone tra uomini, donne, e fanciulli, in maniera che gli uomini abbian 4 scudi per ciascheduno, le donne 2, ed i fanciulli 1. Si domanda, quanti uomini, quante donne, quanti fanciulli sono?

Le incognite sono tre, x, y, z, e l'equazioni son due

1.ª equaz. $x+y+z=20$, o $z=20-x-y$

2.ª equaz. $4x+2y+z=40$, o $z=40-4x-2y$

dunque $40-4x-2y=20-x-y$, o

$3x+y=20$, o

$x=\frac{20-y}{3}$

Sembra a prima vista che si possa prender per y qualunque numero si voglia; ma se si fa riflessione che y, ed x esprimono numeri intieri positivi, si vede bene che y deve esser un numero intiero più piccolo di 20, e che $20-y$ deve esser divisibile esattamente per 3. Si farà dunque successivamente $20-y$ ugual a tutti i multipli di 3; cioè $20-y=3$, $20-y=6$, $20-y=9$, $20-y=12$, $20-y=15$, $20-y=18$. Non si può andar oltre, perchè se si fa $20-y=21$, si avrebbe $y=-1$. Perciò tutte le soluzioni possibili di questo problema son le sei della tavola seguente.

$y=17$

y =	17	x =	1	z =	2
y =	14	x =	2	z =	4
y =	11	x =	3	z =	6
y =	8	x =	4	z =	8
y =	5	x =	5	z =	10
y =	2	x =	6	z =	12

Lorchè dunque ne' problemi *indeterminati* le incognite esprimon cose indivisibili, non si può dar loro valor arbitrario, ed in conseguenza tali problemi son propriamente determinati.

Ecco alcuni altri problemi del primo grado per esercizio de' principianti.

1.° *Pietro arrivato a Roma vi spende il primo giorno il terzo del suo danaro; il secondo giorno ne spende il quarto; il terzo giorno ne spende il quinto, e non gli restan più che 26 scudi. Si domanda che somma egli avea nell' entrar in Roma?*

Risposta 120 scudi.

2.° *Un Orefice compra per 318 lire una massa di metallo composta di 3 oncie d' oro e di 5 d' argento; e compra per 522 lire un' altra massa composta di 5 oncie d' oro, e di 7 oncie d' argento. Si domanda il valore dell' oncia d' oro, e dell' oncia d' argento.*

Risposta. L' oncia d' oro è 96 l., e l' oncia d' argento 6 l.

3.° *Pietro, Giacomo, e Giovanni han perduto al giuoco tutta la loro moneta, Pietro e Giacomo han perduto insieme 10 scudi; Pietro, e Giovanni 11 scudi; Giacomo e Giovanni 9 scudi. Quanto ha perduto ciascuno in particolare?*

Risposta. Pietro 6, Giacomo 4, Giovanni 5.

4.° *Un Asino dice ad una Mula, se io ti dassi uno de' miei sacchi, noi saremmo ugualmente carichi; ma se tu me ne dai uno de' tuoi, io porterò un carico doppio del tuo. Quanti sacchi ciascuno porta?*

Risposta. L' Asino 7, la Mula 5.

5.° *Pietro e Giovanni hanno ugual somma di danaro. Si metton al giuoco, e Pietro vi perde 12 scudi*

ſcudi, e Giovanni 57. Finito il giuoco, ſi trova Pietro quattro volte più ricco di Giovanni. Quanto avea ciaſcuno prima di giuocare?

Riſpoſta. 72. ſcudi.

6°. *Si domanda ad un uomo quanti figli ha? Egli riſponde: ſe aggiungete inſieme la metà, il terzo, ed il quarto, la ſomma ſorpaſſerà di uno il numero de' miei figli.*

Riſpoſta. 12.

7°. *Un' artiſta, che ha 6 lire, riceve quel che gli è dovuto per 5 ſettimane. Quindici giorni dopo non gli reſta che il $\frac{2}{4}$ di tutto il ſuo danaro; ma avendo ricevuto il guadagno di queſte due ſettimane, ſi trova aver ancora 21 lira. Quanto ha egli guadagnato per ſettimana?*

Riſpoſta. 6 lire.

8°. *Un Mercante compra 3 cavalli; il prezzo del primo colla metà del prezzo degli altri due è 25 doppie; il prezzo del ſecondo con il terzo de' prezzi degli altri due è 26 doppie; ed il prezzo del terzo colla metà del prezzo degli altri due è 29. Quanto è il prezzo di cadaun cavallo?*

Riſpoſta. Il prezzo del primo è 8, del ſecondo 18, del terzo 16.

Equazioni del ſecondo grado.

197. Se nel riſolvere qualche problema ſi arriva ad un' equazione, che contenga il quadrato d una quantità incognita ed inſieme il prodotto della ſteſſa incognita per qualche data, come $y^2 + ay = b$ ſi chiama queſta *equazione del ſecondo grado.*

In tali equazioni convien uſare le ſeguenti parole.

1°. Trasferire in un membro dell' equazione tutti i termini contenenti l' incognita, così che nell' altro membro ſieno tutti termini di quantità cognite.

2°. Se il quadrato dell' incognita ha qualche coefficiente, ſi divida per quel coefficiente ciaſcun termine dell' equazione.

O se il quadrato dell' incognita è diviso per qualche coefficiente, si moltiplichi per quel coefficiente ciascun termine dell'equazione; affinchè il quadrato dell' incognita resti libero da qualunque coefficiente.

3°. Se il membro contenente l' incognita non è un quadrato perfetto, si prenda il quadrato della metà del coefficiente annesso all incognita, e si aggiunga all' uno ed all'altro membro dell equazione. In questa guisa il membro contenente l' incognita sarà ridotto ad un quadrato perfetto, da cui si può secondo le regole (128) estrarre la radice quadrata.

Sia ..... $ay = c - 4dy^2$

trasponendo $4dy^2 + ay = c$

dividendo $y^2 + \frac{ay}{4d} = \frac{c}{4d}$

aggiungendo il quadrato della metà del coefficiente $\frac{a}{4d}$ — $y^2 + \frac{ay}{4d} + \frac{a^2}{64d^2} = \frac{c}{4d} + \frac{a^2}{64d^2}$

estraz. della radice $y + \frac{a}{8d} = \pm\sqrt{\frac{c}{4d} + \frac{a^2}{64d^2}}$

trasponendo $y = \pm\sqrt{\frac{c}{4d} + \frac{a^2}{64d^2}} - \frac{a}{8d}$.

198. Accade talvolta, che nel membro delle incognite sienvi più di due termini, come $y^2 + ay - by = c$.

In tal caso si ha da esprimere così $y^2 + \overline{a - b} \times y = c$; ed ecco che il membro dell' incognite è ridotto a due termini, poichè $\overline{a - b} \times y$ non è che un sol termine, dal coefficiente del quale cioè da $\overline{a - b}$ si ha

si ha da prender il quadrato della metà, ed aggiungerlo all'uno ed all'altro membro dell'equazione, la quale perciò diverrà $y^2 + a-b \times y + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4} = c + \frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4}$.

Per render il calcolo più facile, si fa in questa altra guisa: essendo già noto il valore del coefficiente $a-b$, e supponendolo ugual ad e, si metta e invece di $a-b$; onde si avrà.

$$y^2 + ey + \frac{e^2}{4} = c + \frac{e^2}{4}$$

$$x + \frac{e}{2} = \pm\sqrt{c + \frac{e^2}{4}}$$

$$y = \pm\sqrt{c + \frac{e^2}{4}} - \frac{e}{2}$$

199. Diligentemente è da osservarsi il segno $\pm$ premesso alla radice quadrata. Quel segno $\pm$ significa $+$ o $-$; perchè la radice quadrata di qualunque quantità, come di a^2, può esser $+a$, ovvero $-a$, poichè $+a \times +a = a^2$, ed $-a \times -a = a^2$.

Perciò nell'ultima equazione $y + \frac{e}{2} = \pm\sqrt{c + \frac{e^2}{4}}$, ovvero

vero $y + \frac{e}{2} = -\sqrt{c + \frac{e^2}{4}}$; perchè $+\sqrt{c+\frac{e^2}{4}} \times +\sqrt{c+\frac{e^2}{4}} = c+\frac{e^2}{4} = -\sqrt{c+\frac{e^2}{4}} \times -\sqrt{c+\frac{e^2}{4}}$.

200. Ma poichè i quadrati di tutte le quantità son positivi, è evidente, che la radice d'una quantità negativa è impossibile, cioè non può assegnarsi, e perciò queste radici negative son dette *immaginarie*.

201. Si dan talvolta equazioni che non ammetton alcuna soluzione.

Sia . . . . . $y^2 - ay + 3a^2 = 0$

trasponendo. $y^2 - ay = 3a^2$

aggiungendo il quadrato della metà del coefficiente $-a$ $y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = -3a^2 + \frac{a^2}{4} = -\frac{11a^2}{4}$

estraendo la radice $y - \frac{a}{2} = +\sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$.

trasponendo $y = \frac{a}{2} + \sqrt{-\frac{11a^2}{4}}$.

Qui è manifesto, che i due valori della radice y sono *immaginarj*, poichè non può assegnarsi radice della quantità $-\frac{11a^2}{4}$.

Lorchè dunque nella soluzione de' problemi, si giun-

ge

ge le quantità *immaginarie*, è segno manifesto, o che il problema è impossibile, o che siasi adoprato un metodo contenente qualche impossibilità.

202. Se ad una radice immaginaria, come $\sqrt{-a^2}$, si aggiunge una quantità reale b, tutto divien immaginario: Così $b+\sqrt{-a^2}$ è immaginario; perchè se $b+\sqrt{-a^2}$ fosse ugual ad una quantità reale c, si avrebbe $\sqrt{-a^2}=c-b$, il che è impossibile.

203. Le radici immaginarie che han la stessa quantità sotto il segno radicale, come $\sqrt{-a}$, $-\sqrt{-a}$, possono fare per mezzo della moltiplicazione un prodotto reale, in cui non resti alcun segno radicale, purchè quelle radici si moltiplichino sempre in numero pari. Poichè non può svanir il segno radicale, se non quando il termine affetto di tal segno si moltiplichi per un altro termine avente lo stesso segno radicale, e la stessa quantità sotto il predetto segno (145. 2.°).

Se poi tolto così il segno radicale, il prodotto della prima moltiplicazione + si moltiplica per lo stesso segno radicale, il nuovo prodotto sarà di nuovo affetto dello stesso segno radicale; Ma se un'altra volta si moltiplica lo stesso segno radicale, di nuovo svanirà ancora il radicale; e così in appresso.

204. Se qualche termine d'un polinomio contien una radice immaginaria, come è il polinomio $x-a-\sqrt{-b}$, non può svanir il segno radicale, se il dato polinomio non si moltiplichi per un altro, il quale non differisca dal primo che per il segno premesso al radicale. Onde nel proposto polinomio non può svanir il radicale, se non $x-a-\sqrt{-b}\times x-a+\sqrt{-b}$; poichè fatta la moltiplicazione, si ha $x^2-2ax+a^2+b$. In questo solo caso ciascun prodotto di cadaun termine si

ne reale in $\sqrt{-b}$ si elide scambievolmente per i segni contrarj, ed il termine b che contien il prodotto de' due radicali $+\sqrt{b-x}-\sqrt{-b}$, è necessariamente positivo.

L'uso delle quantità immaginarie è frequente: e la lor impossibilità non solo si toglie talvolta colla moltiplicazione, ma anche coll'addizione di due quantità *miste* (cioè composte di real e d' immaginario) con altre quantità *miste*. Come $3+\sqrt{-1}+8-\sqrt{-1}=11$, la somma 11 è reale. Reale è anche la differenza $5=8-\sqrt{-1}-3+\sqrt{-1}$.

205. Ogni equazione del secondo grado si suol rappresentare con questa formola $x^2-px=q$, in cui p e q esprimono qualunque quantità positive o negative.

Onde subito si conchiude $x-\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$.

Su di ciò possono farsi alcune difficoltà. 1.° Per qual ragione $x-\frac{p}{2}$ è egual alla radice negativa $\sqrt{\frac{p^2}{3}+q}$? Due quadrati uguali devon dare radici uguali e collo stesso segno: se $4=4$, non sarà $2=-2$. 2.° Tanto $x-\frac{p}{2}$, quanto $\frac{p}{2}-x$ sono radici dello stesso quadrato $x^2-px+\frac{p^2}{4}$; onde sembra che debbasi scrivere $\pm x+\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$.

Que-

Queste difficoltà si sciolgono facilmente, se si osserva che quest'ultima equazione può risolversi nelle quattro seguenti.

$$x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

$$x - \frac{p}{2} = -\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

$$\frac{p}{2} - x = -\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

$$\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

Le ultime equazioni convengono intieramente colle prime; onde è sufficiente metter il doppio segno $\pm$ in una parte dell'equazione generale, come suol praticarsi.

Si può inoltre stabilir la risoluzione dell'equazione così: La radice quadrata dell'equazione $x^2 - px + \frac{p^2}{4}$ è $x - \frac{p^2}{4}$, se $x > \frac{p}{2}$; e può essere $\frac{p}{2} - x$, se $x < \frac{p}{2}$. Nel primo caso si avrà $x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$; e nel 2.° sarà $\frac{p}{2} - x = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$.

Questi dunque son i due casi distintamente espressi,

i quali col doppio segno + son implicitamente ed oscuramente enunciati nella formola generale $x - p = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$.

Se si avesse $x^2 + px = q$, si troverebbe allora secondo il precedente ragionamento, $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$, cioè la sola radice positiva; della radice *negativa*, o *falsa* non si saprebbe che farne, poiché ella non risolve punto il problema. Frattanto si avrebbe la radice negativa, se si avesse quest'altra equazione $x^2 - px = q$, perchè la radice sarebbe

$$\frac{p}{2} - x, \text{ o } x - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Questo è dunque il metodo per distinguere le radici positive necessarie dalle inutili, le vere dalle false.

206. Le radici d' un' equazione son i differenti valori d' un incognita. Sembra dunque che un problema debba aver tante soluzioni, quante radici ha un' equazione. Ciò è vero in un certo senso, ma richiede dilucidazione.

1.° *Si trovi un numero x, il di cui quadrato più 15 sia ugual a 8 volte il numero cercato.* Cioè sia

$$x^2 + 15 = 8x$$
$$x^2 - 8x = -15$$
$$x^2 - 8x + 16 = 16 - 15 = 1$$
$$x - 4 = +\sqrt{1}$$
$$x = +\sqrt{1} + 4$$

Que-

Questa equazione ha due radici reali e positive, $x = 3$, $x = 5$. Infatti il quadrato di 3 ch' è 9, accresciuto di $15 = 24 = 3 \times 8$; ed il quadrato di 5 che è 25 accresciuto di $15 = 40 = 5 \times 8$.

Onde ciascuna delle due radici dell'equazione scioglie in questo caso il problema, senza niente cambiar il suo enunciato.

Vi son dunque de' casi, ne' quali tutte le radici dell' equazione risolvono il problema nel senso il più immediato, come il suo enunciato presenta.

2.° *Si trovi un numero x minore di* 1, *ma tale che il quadrato* $1 - x = \frac{1}{4}$; o $1 - x^2 = \frac{1}{4}$.

Fatte le prescritte operazioni, si avrà $x = \frac{1}{2}$, e $x = \frac{3}{2}$.

Ecco due radici reali e positive. Frattanto non vi è che la radice $x = \frac{1}{2}$ che propriamente adempia il problema, perchè il quadrato di $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Ma l'altra radice $\frac{3}{2}$ non risolve il problema, poichè il quadrato di $\frac{3}{2}$ è $\frac{9}{4}$, e non già $\frac{1}{4}$. Come dunque scappa fuori questa radice $\frac{3}{2}$ reale e positiva ma inutile?

Ella sarebbe utile, se il problema fosse proposto in quest'altra maniera: *Trovar un numero x maggiore di* 1, *e tale che* $x^2 - 1 = \frac{1}{4}$.

Si avrebbe la stessa equazione trovata nel problema antecedente. Poichè $x^2 - 1 = \frac{1}{4}$.

$$x^2 - 1 = \tfrac{1}{4}$$
$$x^2 - 2x + 1 = \tfrac{1}{4}$$
$$x^2 - 2x = \tfrac{1}{4} - 1 = -\tfrac{3}{4}$$
$$x^2 - 2x + 1 = 1 - \tfrac{3}{4} = \tfrac{1}{4}$$
$$x - 1 = +\sqrt{\tfrac{1}{4}} = +\tfrac{1}{2}$$

$$x = +\tfrac{3}{2} + 1, \quad x = \tfrac{3}{2}, \quad x = \tfrac{1}{2}$$

Qui

Qui la radice $\frac{3}{2}$ è il vero valore dell' incognita x, perchè $\frac{3}{2} > 1$ ed il quadrato di $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{4}$.

Il primo di questi due problemi esige $x = \frac{1}{2}$, ed il secondo $x = \frac{3}{2}$.

Dunque sebben le radici d' un' equazione sien tutte due reali e positive, non ne siegue ch' elle risolvan tutte esattamente, e rigorosamente il problema; ma elle lo risolvono col presentarlo in due sensi differenti, de' quali l' Algebra non può esprimere la differenza. L'enunciato dovrebbe esser nel caso presente così: *Trovar una grandezza* x *tale che sottraendo l' unità dalla grandezza* x, *il quadrato del resto sia uguale a* $\frac{1}{4}$.

3.° *Si trovi un numero* x *tale che sottraendone l' nità, il quadrato del resto sia ugual a* 4. cioè

$$\begin{aligned} &\overline{\quad\quad}-2 \\ &x - 1 = 4 \\ &x^2 - 2x + 1 = 4 \\ &x^2 - 2x = 4 - 1 = 3 \end{aligned}$$

Terminate le necessarie operazioni, si avran queste due radici $x = 3$, $x = -1$. La prima $x = 3$, che è reale e positiva risolve la quistione proposta, ma l'altra $x = -1$ non la risolve punto. Ella però la risolverebbe, se si proponesse il problema in in quest' altra guisa: *Trovar un numero* x, *cui aggiugnendo* 1, *il quadrato della somma sia ugual a* 4. Qui *aggiunger* e *somma* è invece *di sottrarre* e

$$\overline{\quad\quad}-2$$

di *resto* nell'altro problema. In fatti $x + 1 = 4$ dà per radici $x = 1$, $x = -3$, che sono precisamente le stesse radici dell'equazione precedente prese con segni contrarj.

Donde si vede, che *le radici negative soddisfan il problema non come è proposto, ma con farvi de leggieri cambiamenti, i quali consistan in aggiungere quel che dovea sottrarsi, ed in sottrarre quel che si avea da aggiungere*. Il segno che precede queste radici

dici indica una falsa suppoſizione ch'è ſtata fatta nell' enunciato, di *addizione* in vece di *ſottrazione* &c.; e queſto ſegno — raddrizza queſta falſa ſuppoſizione.

Eccone un eſempio ben palpabile. *Si trovi un numero* x *che aggiunto a* 20, *dia la ſomma ugual a* 10. $x + 20 = 10$ diviene $x = 10 - 20$, o $x = -10$.

Queſto $x = -10$ ſignifica, che biſognava enunciar la quiſtione in queſt'altro modo: *Trovar un numero* x *che ſottratto da* 20, *il reſto ſia ugual a* 10.

4°. Se ſi propone queſto problema: *Trovar un numero* x *che unito con* 1, *il quadrato del tutto ſia ugual ad* $\frac{1}{4}$; cioè $x + 1 = \frac{1}{4}$.

Le radici ſaranno $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$. Ecco due radici negative, che indicano che biſognava enunciar il problema in queſt'altra guiſa: *Trovar un numero* x *da cui ſottrato* 1, *il reſto ſia ugual a* $\frac{1}{4}$. Queſto è preciſamente il caſo del numero 1°., in cui le radici ſono le ſteſſe che qui con i ſegni contrarj.

5°. Tutto ciò dunque prova, che le radici negative indicano falſe ſuppoſizioni fatte nell'enunciato, e che il calcolo raddrizza. Perciò le radici negative ſono ſtate da molti Autori chiamate *falſe*, e le radici poſitive *vere*, perchè le prime non ſoddisfano che un falſo enunciato del problema.

Quando tutte le radici ſon negative, come nel caſo precedente, l'inconveniente è leggiero: indicano che il problema avea un falſo enunciato. Si raddrizzi l'enunciato, e tutte le radici diverranno poſitive.

Ma quando elle ſono in parte poſitive, ed in parte negative, l'inconveniente è maggiore. Indican allora, che l'enunciato del problema è in parte vero, ed in parte falſo; frammiſchiano, noſtro mal grado, una quiſtione ſtraniera colla quiſtione propoſta, ſenza che ſia poſſibile ſeparle, neppure col rettificar l'enunciato; perchè col cambiar nell'enunciato le parole *aggiugner* e *ſomma* in *ſottrarre* e *reſto*, la radice ne-

ga-

gativa divien bensì positiva, ma la positiva divien negativa; e si resta sempre nello stesso imbarazzo, senza poter mai ridurre la quistione ad un enunciato che dia solamente radici reali e positive.

Dunque queste radici negative, se sono una ricchezza, come ha sembrato a molti Algebristi, son una ricchezza imbarazzante.

6°. Se si propone *trovar un numero* x, *che* $\overline{x+1}^{-2} = -4$ si avrebbero le radici $x = -1 + \sqrt{-4}$ e $x = -1 - \sqrt{-4}$.

Valori *immaginarj* indicanti che l'enunciato del problema è assurdo, e ch'è impossibil a risolversi.

Ma perchè due radici immaginarie? Una sola non basterebbe forse per avvertire l'assurdità? Si risponde, che le due immaginarie avvertono, che la quistione è assurda non solamente nel suo enunciato, ma anche in qualunque altro enunciato, che se gli sostituisse. Poichè se invece di $x + 1$ si mette $x - 1$, o $1 - x$, tanto $\overline{x-1}^{-2} = -4$, come $\overline{1-x}^{-2} = -4$, dà sempre le radici $x = 1 + \sqrt{-4}$, e $x = 1 - \sqrt{-4}$, radici sempre immaginarie, che danno un'impossibile soluzione.

7°. Sicchè quando un'equazione ha tutte le radici *negative*, o *false*, ciò indica che il problema è impossibile nel senso diretto, ma non in un altro senso. Ma quando l'equazione ha tutte le radici *immaginarie*, questo è un indizio che il problema è impossibile in qualunque senso si presenta. Lorchè le radici son *reali* ed *incommensurabili*, ciò indica che il problema non ha soluzione numerica esatta, ma che si può trovar un numero che si avvicini più che si vorrà alle condizioni proposte.

Dunque le radici negative, immaginarie, incommensurabili disegnano differenti specie d'impossibilità nella

nella soluzione, ma impossibilità più o meno intiere, più o meno assolute.

Delle Quantità Negative.

207. Ora si può aver un'idea chiara delle quantità *negative*.

Alcuni riguardan queste quantità come *meno del niente*, nozione intieramente assurda. Altri le ravvisano *esprimenti debiti*; nozione troppo limitata, ed in conseguenza poco esatta. Altri le considerano come quantità *che devon esser prese in un senso contrario alle quantità positive*: nozione anche questa soggetta a molte eccezioni, poichè gli esempj fan vedere, che le quantità rappresentate col segno negativo devon talvolta esser prese nello stesso senso come le quantità caratterizzate col segno positivo.

Che cosa dunque sono le quantità negative? Convien distinguerne di due sorti.

1°. Le prime indicano una falsa supposizione, ch'è stata fatta nell'enunciato del problema: supposizione raddrizzata dalla soluzione. Se si domanda *un numero che aggiunto a* 20 *faccia* 15, si troverà 5 col segno negativo. Il che mostra, che si avrebbe dovuto proporre il problema in quest'altra maniera: *trovar un numero che sottratto* (*e non aggiunto*), *da* 20, *il resto sia ugual a* 5. Le quantità negative di questa specie mostran la generalità e'l vantaggio del calcolo Algebraico, il quale raddrizza, per così dire, il calcolatore partendo dalla supposizione stessa che avrebbe dovuto smarrirlo.

2°. La seconda specie delle quantità negative s'incontra principalmente ne' problemi, ove il risultato del calcolo sembra presentare molte soluzioni. Le quantità negative allora indicano soluzioni del medesimo problema, ravvisato in un punto di vista un po differente dal supposto nell'enunciato, ma sempre analogo al primo senso. Le quantità negative di questa seconda specie mostran da una parte la ricchezza dell'

dell' Algebra, che fa trovar nella ſoluzione del problema fin le coſe che non ſi domandano ; ma nel tempo ſteſſo l'imperfezione del calcolo, il quale nel dare quel che non ſi cerca, non dà ſempre quel che gli ſi domanda con tutta l'eſattezza. Accade ſpeſſo ne' problemi Algebraici, che di quante ſoluzioni dà il calcolo, non ve ne ſia che una ſola poſſibile nel ſenſo propoſto, ma queſta ſoluzione è ſovente incorporata ed amalgamata con molte altre ſoluzioni di problemi analoghi ma differenti: onde tutte queſte altre ſoluzioni inviluppando e maſcherando la prima la rendono difficil a ſcoprirſi.

Problemi del 2°. Grado.

1°. Probl. *Trovar ſopra la data linea, che uniſce due lumi qualunque, il punto in cui queſti due lumi illuminino ugualmente*: ſupponendo il noto principio di Fiſica, che l'effetto d'un lume è in ragion inverſa de' quadrati della diſtanza.

La diſtanza tra i due lumi ſia a, il rapporto del lume minore al lume maggiore ſia come m ad n, ed x ſia la diſtanza tra il minor lume ed il punto richieſto. E' chiaro, che $a - x$ ſarà la diſtanza tra l'altro lume e lo ſteſſo punto, e che i quadrati di queſte diſtanze ſaranno x^2, e $x^2 - 2ax + a^2$.

Or ſi è già ſuppoſto, che gli effetti, o intenſità della luce, ſon in ragion inverſa de' quadrati delle diſtanze, dunque le intenſità di queſti lumi ſaranno $\frac{1}{x^2}$, e $\frac{1}{x^2 - 2ax + a^2}$. Ma queſti lumi ſon in ragione di m ad n, dunque i lor effetti ſono tra loro come $\frac{m}{n}$ a $\frac{x^2}{x^2 - 2ax + a^2}$ dunque ſi ha queſta equazione .....

mol-

$$\frac{m}{x^2} = \frac{n}{x^2 - 2ax + a^2}$$

moltiplicando $mx^2 - 2amx + a^2m = nx^2$

trasferendo $nx^2 - mx^2 + 2amx = a^2m$

ovvero $x^2 \times n - m + 2amx = a^2m$

dividendo $x^2 + \frac{2amx}{n-m} = \frac{a^2m}{n-m}$

aggiungendo il quadrato della metà del coefficiente del secondo termine; e riducendo ad uno stesso denominatore $x^2 + \frac{2amx}{n-m} + \frac{a^2m^2}{n-m^2} = \frac{a^2mn}{n-m^2}$

estraendo la radice $x + \frac{am}{n-m} = \pm\sqrt{\frac{a^2mn}{n-m^2}}$

trasponendo $x = -\frac{am}{n-m} \pm \sqrt{\frac{a^2mn}{n-m^2}}$

estraendo $x = -\frac{am}{n-m} \pm \frac{a}{n-m}\sqrt{mn}$

formola delle due radici. $x = \frac{a}{n-m} \times -m \pm \sqrt{mn}$

E' chiaro che di queste due radici una ha valor *positivo*, e l'altra *negativo*; perchè se $\sqrt{mn}$ si prende col segno —, tutta la quantità divien negativa; se poi $\sqrt{mn}$ si prende col segno +, la quantità $-m \pm$

$+\sqrt{mn}$ sarà positiva, perchè avendo supposto $n > m$, sarà anche $\sqrt{mn} > m$.

Or sia $n = 4m$, cioè il maggior lume abbia quattro volte più intensità dell' altro; sostituendo questo valore di n nella formola generale $x = \frac{a}{n-m} \times -m \pm \sqrt{mn}$, ella diverrà $x = \frac{a}{3} \times \pm 2 - 1$; cioè una radice sarà $x = \frac{1}{3}a$; e l'altra $x = -a$.

La radice positiva $x = \frac{1}{3}a$ risolve il problema proposto, vale a dire che il punto cercato tra i due lumi distante dal piccolo è $\frac{1}{3}$ della data linea a.

Ma l'altra radice negativa $x = -a$ che significa? Ella significa, che se si avesse fatta attenzione alla possibilità di prender questo punto sul prolungamento della linea che unisce i due lumi, e si avesse pronunziato il problema in questa maniera: *Trovar un punto in cui questi due lumi rischiarin ugualmente*: In questo caso la radice negativa $x = -a$ significa che il punto richiesto deve essere sul prolungamento della data linea, e distante dal minor lume quanta è la distanza a tra i due lumi.

Poichè in questo secondo problema, x è la distanza tra questo punto ed il piccol lume, quel a del maggiore sarà $a + x$. I quadrati di queste distanze saranno x^2, e $a^2 + 2ax + x^2$; le due quantità di lume $\frac{m}{x^2}$, e $\frac{n}{a^2 + 2ax + x^2}$ le quali per le condizioni del problema essendo uguali, daranno questa equazione

$\frac{m}{x^2}$

$$\frac{m}{x^2} = \frac{n}{a^2 + 2ax + x^2}$$

$$a^2m + 2amx + mx^2 = nx^2$$

$$n - m \times x^2 - 2amx = ma^2$$

$$x^2 - \frac{2amx}{n-m} = \frac{m}{n-m}a^2$$

$$x = \frac{a \times m + \sqrt{mn}}{n-m}$$

La prima di queſte due radici, cioè $x = \frac{a \times m + \sqrt{mn}}{n-m}$ che è poſitiva, riſolve il problema com'è ſtato enunciato ultimamente. E la ſeconda radice $x = \frac{a \times m - \sqrt{mn}}{n-m}$ che è negativa, lo riſolve com'era ſtato enunciato la prima volta, cioè il punto cercato non deve eſſer nel prolungamento della data linea, ma entro la linea ſteſſa.

Problema 2°.

Trovar tre termini d'una progreſſione geometrica di cui il primo è 4, e la differenza tra il 2° ed il 3° è 3.

Riſpoſta. $\div\div$ 4, 6, 9.

Problema 3°.

Trovar un numero, cui aggiungendo la radice quadrata del ſuo prodotto per 10, *ſia ugual a* 20.

Riſpoſta. 10.

Problema 4°.

Data la ſomma 6 *di due numeri, e la ſomma* 20 *de' loro quadrati: Qual ſarà ciaſcuno di queſti numeri?*

Riſpoſta. Il maggior = 4, il minore = 2.

Problema 5°.

Trovar due numeri, de' quali il prodotto ſia 12, *e la differenza de' loro quadrati ſia* 7.

Riſpoſta. L'uno ſarà 4, e l'altro 3.

Dell' Equazioni di differenti Gradi.

208. Per regolar il calcolo dell'equazioni di qualunque grado, ſi uſa mettere nel primo membro tutti i termini ſecondo l'ordine decreſcente degli eſponenti dell'incognita, e nell'altro membro ſi mette zero. Ciò ſi dice *ordinar un' equazione*, come $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x - 258 = 0$.

E' un' *equazione compita*, *o che ha tutti i ſuoi termini*, quella in cui l'ordine decreſcente degli eſponenti dell'incognita è ſecondo la ſerie naturale de' numeri ſenza interruzione, e che inoltre ha un termine compoſto di quantità tutte cognite, com'è l'equazione precedente.

Onde un'*equazione compita* deve aver un termine di più di quel che ſieno le unità nel più grande eſponente dell'incognita. Dunque un'equazione compita del 4°. grado deve aver 5 termini.

209. I termini d'un'equazione prendon il loro nome

me dall'ordine in cui si devon trovare, supponendo l'equazione *compita ed ordinata*.

Onde si chiama primo termine quello in cui l'incognita ha il maggior esponente; secondo termine quello in cui l'esponente dell'incognita è più piccolo d'una unità &c.; finalmente ultimo termine quello che non contien alcuna incognita.

Se vi è qualche interruzione nella progressione decrescente delle potenze dell'incognita, l'equazione è *incompleta*; e quando si dice che vi mancan tali termini, s'intendon quelli che dovrebbero esser ne' luoghi, ove è l'interruzione, ed i termini mancanti si suppliscono cogli asterismi. Come $x^5 - 3x^3 + x^2 - 6 = 0$ è un'*equazione incompleta*, perchè vi manca il 2°. e 5°. termine.

210. Un'equazione che non ha l'ultimo termine è d'un grado inferior a quello che apparisce. Così $x^3 - ax^2 + bx = 0$, è del secondo grado, perchè dividendo tutti i termini per x, diviene $x^2 - ax + b = 0$.

Nella stessa guisa $x^4 + a^2x^2 = a^4$, che pare del 4°. grado, è un'equazione del 2°, perchè facendo $x^2 = az$, diviene $a^2z^2 + a^2z = a^4$, ovvero $z^2 + az = a^2$. Questo è quel che si chiama *abbassamento*.

211. Un'equazione ha tante radici, quante unità vi sono nel numero che n'esprime il grado. Onde un'equazione del 3°. grado ha tre radici, quella del 4°. quattro radici &c. La ragion è manifesta, poichè un'equazione composta è il prodotto di tante equazioni del primo grado, quante unità vi sono nel più grande esponente dell'incognita dell'equazione composta.

212. In un'equazione ordinata e compita, le radici positive son tante, quante sono le permutazioni de' segni; e le radici negative son tante, quante le successioni de segni. Così nell'equazione $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$, essendo due permutazioni di segni $+ -$, e $- +$, ed una successione $- -$, delle tre radici due son positive, ed una negativa.

213. Se nell'equazione manca un termine, è manifesto, che tutte le radici non hanno lo stesso segno;

poichè il coefficiente di questo termine non ha potuto esser distrutto, se non perchè essendo formato della somma di molti prodotti, se ne son trovati de' negativi che han fatto svanir i positivi: il che non ha potuto accadere, se non a causa che le quantità formanti questi prodotti, avean segni differenti.

Equazioni del 3°. Grado.

214. Se l'equazione è compita, come $y^3 - 8y^2 - y + 8 = o$, convien fare svanire il 2°. termine $-8y^2$, poichè allora il restante $y^3 - y + 8 = o$ è più facile a ridursi.

1°. Per fare svanir il 2°. termine, convien servirsi di questa regola generale: *Se in un' equazione superiore, il 2°. termine è positivo, si aumenti la radice y; e se il 2°. termine è negativo, si diminuisca la radice y di una quantità frazionaria, che abbia per numeratore il coefficiente del 2°. termine, e per denominatore l' esponente del 1°. termine dell' equazione data.* In questa guisa si ha un'equazione *trasformata*, in cui il 2°. termine è svanito.

Così nell'esempio proposto si diminuisca la radice y della quantità $\frac{8}{3}$, cioè sia $y - \frac{8}{3} = x$, ovvero $y = x + \frac{8}{3}$.

2°. Si cerchi il nuovo valore de'l'equazione $y^3 - 8y^2 - y + 8 = o$, supponendo $y = x + \frac{8}{3}$. Le operazioni daranno il seguente risultato.

$$y^3 = x^3 + 8x^2 + 64x + 512$$

$$-8y^2 = -8x^2 - \frac{128x}{3} - \frac{512}{27}$$

$$-y = -x - \frac{8}{3}$$

$$+8 = +8$$

Somma $y^3 - 8y^2 - y + 8 = x^3 - \frac{67x}{3} - \frac{880}{27}$ equazione *trasformata*.

3°. Per

3°. Per iſciogliere queſta *trasformata* $x^3 - \frac{67x}{3} - \frac{880}{27} = o$, ſi faccia $\frac{67}{3} = p$, e $\frac{880}{27} = q$: la precedente equazione ſarà convertita in queſt'altra $x^3 - px - q = o$; dunque traſportando, ſarà $x^3 = px + q$.

4°. Si faccia indi $x = u + z$; e ſi cerchi qual ſarà in queſta ipoteſi il nuovo valore dell'equazione $x^3 = px + q$. Sarà queſto $u^3 + 3u^2z + 3z^2u + z^3 = pu + pz + q$.

5°. Si faccia $3u^2z + 3z^2u = pu + pz$. Dunque dividendo tutto per $u + z$, ſi avrà $3uz = p$, e $z = \frac{p}{3u}$.

6°. Ma ſe nell'equazione $u^3 + 3u^2z + 3z^2u + z^3 = pu + pz + q$ ſi è fatto $3u^2z + 3z^2u = pu + pz$, ſarà dunque $u^3 + z^3 = q$. Ma $z = \frac{p}{3u}$, dunque $u^3 + \frac{p^3}{27u^3} = q$.

Dunque moltiplicando tutto per u^3, ſi avrà $u^6 + \frac{p^3}{27} = u^3$, la qual è un'equazione del 2°. grado ; perchè è la ſteſſa che $u^6 - qu^3 = \frac{p^3}{27}$ ed aggiungendo il quadrato della metà del coefficiente q del 2°. termine, ſarà $u^6 - qu^3 + \frac{q^2}{4} = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ ed eſtraendo la radice quadrata $u^3 - \frac{1}{2}q = \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}$

$$q = \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{p^3}{27}}$$

Dunque $u^3 = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}$

Ed estraendo la radice cubica, sarà $u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{p^3}{27}}}$

7.° $z = \frac{p}{3u}$ (5°), dunque $z = \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}}$

ovvero $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$.

8°. Per provare che $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} = \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}}$, eccone il metodo.

Il cubo di $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$ è $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$. Similmente il cubo di $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$ è $\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$.

Il prodotto del cubo $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ per il cubo $\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ è $\frac{1}{27}p^3$, perchè $+\frac{1}{2}q \times +\frac{1}{2}q$ dà un prodotto che distrugge $+\sqrt{\frac{1}{4}q^2} \times -$

$x - \sqrt{\frac{1}{4}q^2}$: Onde resta il prodotto di $-\sqrt{\frac{1}{27}p^3}$ $x - \sqrt{\frac{1}{27}p^3} = \frac{1}{27}p^3$. Dunque il prodotto del cubo $\frac{1}{2}q\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ per il cubo $\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}$ è $\frac{1}{27}p^3$: Dunque $\frac{1}{3}p$ è il prodotto delle due radici cubiche di questi due cubi; dunque $\frac{1}{3}p$ è il prodotto di $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$ per $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$.

Or se si divide il prodotto per il moltiplicando, si ha per quoziente il moltiplicatore;

$$\frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}}$$

dunque $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$; dunque (num. 5°.) $z = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$.

9°. $x = u + z$ (num. 4°.) dunque $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3}}$.

10°. Per aver in numeri il valore di x, suppongasi $q = 40$, e $p = 6$: sarà $\frac{1}{2}q = 20$, $\frac{1}{4}q^2 = 400$, $\frac{1}{3}p = 2$, e $\frac{1}{27}p^3 = 8$. Dunque $\sqrt{\frac{1}{4}q^2 - \frac{1}{27}p^3} = \sqrt{400 - 8} = \sqrt{392} = 14\sqrt{2}$ (135)

Dunque il cubo $\frac{1}{2}q\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3} = 20 + 14\sqrt{2}$; dunque $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}} = \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2}$.

Dunque $\sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}} = 2-\sqrt{2}$. Dunque $x = 4$.

11°. Trovato il valore di x, si riprende l'equazione $y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0$, e convien ricordarsi che $y = x + \frac{8}{3}$, e poichè x è cognita, lo sarà anche y.

12°. Se si ha bisogno di tutte le radici dell'equazione $y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0$, si abbassi (210) questa equazione di un grado per mezzo della radice trovata, e per ridurla si adoprino le regole solite a praticarsi nelle operazioni dell'equazioni del 2°. grado.

215. Dunque in un'equazione del 3°. grado, dopo svanito il 2°. termine, la formola generale è $x^3 - px - q = 0$.

Se si avesse avuta l'equazione $x^3 + px - q = 0$, si avrebbe trovato collo stesso metodo $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$.

Finalmente se si avesse avuta l'equazione $x^3 - px + q = 0$, si avrebbe avuto colla stessa facilità $x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}}$.

Ma quì è dove s'incontrano delle radici immaginarie e s'inciampa nel Caso irreduttibile.

Caso Irreduttibile.

216. Questo caso è quello, in cui *un'equazione del 3.° grado ha le sue radici reali, inuguali ed incommensurabili*. In questo caso se si risolve l'equazione col metodo ordinario, la radice benchè reale, si presenta sotto una forma che racchiude quantità immaginarie; e non si ha potuto finora dopo duecent'anni di studio ridurre questa espressione ad una forma reale collo scacciar via le immaginarie ch'ella contiene.

Sia $x^3 + qx + r = o$, in cui è svanito il secondo termine. Per risolverla

1.° Si faccia $x = y + z$. Si avrà $x^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$. Ma siccome $3y^2z + 3yz^2 = 3yz \times y + z = x$, sarà $3y^2z + 3yz^2 = 3yzx$. Dunque $x^3 = y^3 + 3yzx + z^3$, ovvero $x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = o$.

2.° Paragonando i termini di questa equazione $x^3 + qx + r = o$, si avrà $-3yz = q$, ovvero $z = -\frac{q}{3y}$, $y^3 + z^3 = -r$, o sia $y^3 + r = -\frac{q^3}{27y^3}$, o $y^6 + ry^3 = -\frac{q^3}{27}$.

3.° Questa equazione, che si può riguardare come di 2.° grado (210), risolvendosi nella forma ordinaria, dà $y^3 = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$. Dunque a causa di $z^3 = -r - y^3$, si avrà $z^3 = -\frac{r}{2} \mp \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$.

Dun-

Dunque x, o y + z = $\sqrt[3]{-\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}}$ +

$\sqrt[3]{-\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}}$.

Tal è la forma del valore x.

Ciò posto, ne siegue.

1.° Se q è positivo, questa forma è reale, e non vi è difficoltà alcuna.

2.° Se q è negativo, e $\frac{r^2}{4} = \frac{q^3}{27}$, non vi è nemmeno difficoltà.

3.° Se q è negativo, e $\frac{r^2}{4} > \frac{q^3}{27}$, neppure vi è difficoltà alcuna.

4.° Ma se q è negativo, e $\frac{r^2}{4} < \frac{q^3}{27}$, allora è la gran difficoltà, perchè $-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}$ è una quantità negativa, e per conseguenza $\sqrt{-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$ è immaginaria.

Come dunque si rappresenterà x?

M.r Nicole è stato il primo a risolver questa difficoltà, col ridurre la quantità $\sqrt{-\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}}$ in serie, dove benchè vi sieno dell' immaginarie si contien una quantità reale. Ma la difficoltà consiste a sommar le serie: difficoltà che non è ancora sormontata.

L'in-

L'inconveniente del *Caso Irreduttibile* vien dal metodo imperfetto usato finora per risolver l'equazioni del 3.° grado. L'imperfezione consiste nel supporre $x = y + z$, e nel paragonare l'equazione $x^3 - 3yzx - y^3 - z^3 = o$, a quest'altra equazione $x^3 + px + r = o$, dal qual paragone si vuol ricavare che $qx = -3yzx$, il che porta al *caso irreduttibile:* Mentre che l'equazione $x = y + z$ non dà rigorosamente che questa equazione $qx + r = -3yzx - y^3 - z^3$, ovvero $qy + qz + r = -3y^2z - 3yz^2 - y^3 - z^3$.

Equazioni del 4.° Grado.

217. Sia questa equazione compita $y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = o$.

1.° Si deve fare svanir il 2.° termine $+ay^3$, facendo $y = z - \frac{1}{4}a$ (214 1.°) Onde la predetta equazione diviene $z^4 + pz^2 + qz + r = o$, riflettendosi che li p, q, r son invece degli a, b, c, d alterati dall' operazione.

2.° Per risolvere la trasformata $z^4 + pz^2 + qz + r = o$, il più semplice espediente è riguardarla come il prodotto di due equazioni del 2.° grado. Suppongasi che una delle due equazioni produttrici sia $z^2 + xz + t = o$. E' evidente, che l'altra dovrà avere per 2.° termine $-xz$, perchè il prodotto di queste due equazioni deve dar un'equazione priva del 2.° termine. Sia dunque questa 2.ª equazione $z^2 - xz + s = o$.

Il loro prodotto sarà $z^4 + sz^2 + sxz + ts = o$.
$- x^2 - tx$
$+ t$

3.° Or paragonando questa ultima equazione colla trasformata, si avrà $s - x^2 + t = p$; $sx - tx = q$; $ts = r$.

4.° Per far uso di queste tre equazioni, si moltiplichi per x la prima $s - x^2 + t = p$, si avrà $sx - x^3 + tx = px$, e si unisca questa alla 2.ª $sx - tx = q$; si avrà

avrà $2sx - x^2 = px + q$, ovvero $s = \frac{q + px + x^2}{2x}$.

5.° Questo valore di s si sostituisca alla 3.ª equazione (n.° 3.°) $ts = r$, si avrà $t \times \frac{q + px + x^2}{2x} = r$, ovvero $t = \frac{2rx}{x^2 + px + q}$.

6.° Or mettendo questi due valori di s e di t nella 2.ª equazione (num. 3.°) $sx - tx = q$, si avrà finalmente $\frac{x^2 + px + q}{2} - \frac{2rx^2}{x^2 + px + q} = q$; e facendone svanir i denominatori, si avrà $x^6 + 2px^4 + p^2x^2 - 4r - q^2 = o$.

7.° Questa equazione del 6.° grado si abbassa (210) ad una del 3.°, facendo $x^2 = u - \frac{2}{3}p$, e diviene $u^3 + \frac{1}{3}p^2u - 4ru + \frac{8}{3}pr + \frac{1}{2}\frac{1}{7}p^3 + q^2 = o$.

Dunque tutta la difficoltà dell'equazione del 4.° grado si riduce a quella del 3.°

8.° Risoluta l'equazione del 3.° grado $u^3 + \frac{2}{3}p^2u - 4ru + \frac{8}{3}pr + \frac{1}{2}\frac{1}{7}p^3 + q^2 = o$, e trovato il valore di u o sia di x, si sostituisca nell'equazioni $z^2 - xz + s = o$, e $z^2 = xz + t = o$ (n.° 2.°); o piuttosto nell'equazioni $z^2 - xz + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2x} = o$, e $z^2 + xz + \frac{2r}{x^2 + p + \frac{x}{q}} = o$.

9.° Risolute queste due ultime equazioni, e sostituito il valore di x nelle radici $z = \frac{1}{2}x + \sqrt{-\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2x}}$, e $z = -\frac{1}{2}x +$

si

$\sqrt{\frac{2r}{x^2+p+\frac{q}{x}}}+\frac{1}{2}x^2$, si avranno così le quattro radici cercate dell'equazione $z^4+pz^2+qz+r=0$, e con ciò quelle dell'equazione proposta $y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$.

Applicazione.

218. Sia l'equazione $y^4+16y^3+99y^2+228y+144=0$.

Facendo $y=z-4$, la predetta equazione si cambierà in quest'altra $z^4+3z^2-52z+48=0$, in cui è svanito il 2.° termine.

Ora si paragoni questa 2.ª equazione colla generale $z^4+pz^2+qz+r=0$, e si avrà $p=3$; $q=-52$; $r=48$.

Considerandosi questa equazione generale come prodotta dalle due equazioni $z^2+zx+t=0$, e $z^2-zx+s=0$, e facendo le operazioni indicate (217. num. 4.° e seg.), si avrà la ridotta $x^6+6x^4-183x^2-2704=0$.

Questa ridotta del 6.° grado si abbassa ad un'equazione del 3.°, facendo $x^2=u-2$; e si avrà $u^3-195u-2322=0$,

Risolvendo quest'equazione del 3.° grado (214), si avrà $u=\sqrt[3]{1161+\sqrt{1073296}}-\sqrt[3]{-1161+\sqrt{1073296}}=\sqrt[3]{1161+1036}-\sqrt[3]{-1161+1036}=\sqrt[3]{2197}+\sqrt[3]{-125}=18$. Ma siccome $x^2=u-2$, sarà $x=\sqrt{u-2}$, ed in conseguenza $x=\sqrt{18-2}=4$.

Non resta ora da far altro che sostituir il valore di x alle radici $z=\pm\frac{1}{2}x\pm\sqrt{-\frac{1}{4}x^2-\frac{p-q}{2}+\frac{q}{2x}}$, onde sarà

sarà $z = +2 + \sqrt{-4} - \frac{3}{2} + \frac{13}{2}$.

Dunque sono le due radici reali di $z = 2 \pm 1$, cioè 3, o 1; e le due radici immaginarie sono $z = -2 \pm \sqrt{-4} - \frac{3}{2} - \frac{13}{2}$, o $z = -2 \pm \sqrt{-12}$.

Sostituendo ora questi quattro valori in $y = z' - 4$, si avrà per le quattro radici dell' equazione proposta $y^4 + 16y^3 + 99y^2 + 228y + 144 = 0$, $y = -1$, $y = -3$, $y = -6 \pm \sqrt{-12}$.

219. Da quanto è stato esposto si vede, che finora non si ha soluzione compita che del secondo grado.

L'equazioni del 3.° grado cadono spesso nel caso irreduttibile; perchè se un'equazione del 3.° grado ha una radice reale commensurabile, questa radice commensurabile si presenta sotto una forma incommensurabile, e ci vuol della fatica per liberarla da questa forma. L'equazioni del 4.° grado si riducono al 3.°, e sono per conseguenza soggette agli stessi inconvenienti. Passato il quarto grado non vi è più metodo nemmen imperfetto e troncato per ridurre l'equazioni.

Riflessioni.

220. Ora si conosce bene che cosa è Analisi Matematica. Se l' Algebra è la Scienza del calcolo delle grandezze in generale, l' Analisi è il mezzo d' impiegar l' Algebra alla soluzione de' problemi. Tutte due forman un' *Aritmetica Universale*, che può ridursi alle due regole seguenti.

Prima Regola. *Proposto un problema geometrico o numerico, si paragonino insieme le quantità cognite ed incognite rinchiuse in questo problema; e senza distinguer le une dall' altre, si esamini come tutte queste quantità dipendono le une dall' altre; e quali son quelle, che essendo cognite, faran conoscer l' altre, procedendo con un metodo sintetico.*

Secon-

Seconda Regola. *Tra queſte quantità che fanno conoſcer l' altre, e che perciò ſi chiaman* ſintetiche, *ſi cerchino quelle che faran conoſcer l' altre più facilmente, e che potrebbero eſſer trovate più difficilmente ſe non ſi ſupponeſſero cognite; e ſi riguardino, e ſi trattino queſte quantità come cognite.*

221. Su ciò è fondata la regola de' Geometri, i quali dicono, che *per riſolver un problema algebraicamente, biſogna ſupporlo riſoluto*. Infatti per riſolver un problema, convien rappreſentarſi tutte le grandezze sì cognite che incognite come quantità che ſi hanno avanti gli occhi, e che dipendono tutte le une dall' altre, in maniera che le cognite e le incognite poſſono reciprocamente ed a vicenda eſſer trattate, ſe ſi vuole, da cognite e da incognite.

222. L' uſo che l' *Analiſi Matematica* fa dell' Algebra, per trovar le incognite per mezzo delle cognite, è che la diſtingue dall' *Analiſi Logica*; la quale non è altro in generale che l' *Arte di ſcoprire l' incognito per mezzo del cognito*. Ogni Algebriſta ſi ſerve dell' *Analiſi Logica*, per incominciar e condurre il calcolo: ma nello ſteſſo tempo il ſoccorſo dell' Algebra facilita eſtremamente l' applicazione di queſt' Analiſi alla ſoluzione de' problemi.

223. L' Analiſi è l' iſtromento o il mezzo generale, per cui ſi ſon fatte da due ſecoli in quà sì belle ſcoperte nelle Matematiche. L' Analiſi dà gli eſempj i più perfetti della maniera come ſi deve impiegar l' arte del ragionamento; dà allo ſpirito una maraviglioſa prontezza per iſcoprire le coſe incognite per mezzo d' un picciol numero di date; ed impiegando ſegni abbreviati e facili per eſprimer le idee, ella preſenta all' intendimento coſe, che altrimenti ſembrerebbero eſſer fuori della ſua sfera.

Con queſto mezzo le dimoſtrazioni Geometriche poſſon eſſer ſingolarmente abbreviate. Una lunga ſerie d' argomenti, dove lo ſpirito non potrebbe ſenza l' ultimo ſforzo d' attenzione ſcoprir il legame dell' idee, è convertito in ſegni ſenſibili, e le diverſe combinazioni

ni che vi ſon richieſte, ſon effettuate dalla combinazione di queſti ſegni.

Ma quel ch' è ancora più ſtraordinario, ſi è, che per mezzo di queſt arte un gran numero di verità ſono ſovente eſpreſſe da una ſola linea; laddove ſe ſi ſeguitaſſe la maniera ordinaria di ſpiegare e di dimoſtrare, queſte verità riempirebbero volumi intieri. Così col ſolo ſtudio di una linea di calcolo ſi poſſon apprender in poco tempo ſcienze intiere da non poterſi altrimenti apprendere appena in molti anni.

224. L Analiſi è diviſa riguardo al ſuo oggetto, in *Analiſi di quantità finite, e in Analiſi di quantità infinite*.

Analiſi di quantità finite è quella che ſi chiama comunemente Algebra, di cui ſi è trattato finora, e di cui i migliori Autori ſono: Nevvton *Arithmetica Univerſalis*; s' Graveſande *Elementa Algebræ*; P. Reyneau *l' Analyſe demontrèe e la ſcience du calcul*; Saunderſon *Elemens d' Algebre*; Clairaut *Elemens d' Algebre*; Paulini *Inſtitutiones Analyticæ*; la Signora Agneſi *Inſtituzioni Analitiche &c.*

Fra queſti ed altri Autori ha grandiſſimo merito l' Abbè de la Caille nella ſua bell' Opera *Leçons Elementaires de Mathematiques*, (1) ſul di cui chiaro metodo ſi ſon formati queſti noſtri Elementi di Matematiche, ſervendoci ancora de' lumi, che il chiariſſimo M. d' Alembert ha ſparſo negli articoli Matematici dell' *Encyclopedie*.

L' Analiſi di quantità infinite o degl' infiniti, detta anche la *Nuova Analiſi*, è quella che calcola i rapporti delle quantità che ſi prendono per infinite, o per

(1) Di queſto celebre Autore ſi ſono ſtampate in Venezia preſſo Tommaſo Bettinelli tutte le Opere in in lingua latina, cioè *Lectiones elementares Mathematicæ, Aſtronomicæ, Opticæ, & Mechanicæ*.

per infinitamente picciole. Il gran vantaggio de' Matematici moderni ſopra gli Antichi vien principalmente dall' uſo che ſi fa di queſta *Analiſi*, di cui ſi anderà a trattar in fine di queſta Opera.

CAPITOLO III.

Delle Proporzioni.

225. RAgione o *Rapporto* è il riſultato della comparazione ſcambievole di due quantità.

Chiamaſi *Ragione Geometrica*, ſe in quella relazione ſi conſidera quanto una quantità contenga l' altra.

Se poi ſi riguarda l' eccesſo d' una quantità ſopra l' altra, diceſi *Ragion Aritmetica*.

In qualſivoglia Ragione il primo de' due termini, che ſi paragonano, chiamaſi *Antecedente*, il ſecondo *Conſeguente*.

Eſponente della Ragion Geometrica diceſi il quoziente nato dall' antecedente diviſo per il *conſeguente*. Come 2 è l'*eſponente* di 6 a 3.

L'*eſponente* della Ragion Aritmetica è la *differenza* de' termini, cioè la differenza tra l' antecedente e'l conſeguente. Come 2 è la differenza tra 7 e 5. Quindi la ragione geometrica ſi ſcrive a guiſa di frazione $\frac{6}{3}$, e l'aritmetica come ſottrazione $7 - 5$.

226. L'uguaglianza di due ragioni forma quel che ſi chiama *Proporzione*; la quale ſarà Geometrica o Aritmetica ſecondo la qualità delle ragioni.

E' dunque evidente, che in ogni proporzione vi devon eſſer quattro quantità, delle quali *la prima* diceſi *eſſer alla ſeconda, come la terza alla quarta*. Quindi ſi vede, che non convien confondere la Ragione colla Proporzione come ſi fa comunemente: ſon due coſe differentiſſime l'una dall'altra.

227. Se tralle due prime quantità, o termini, vi è la ſteſſa differenza, che vi è fralle due ultime, quelle quantità ſon *aritmeticamente proporzionali*.

Come 9. 5: 7, 3; queſta è la maniera d'eſprimere

la proporzione aritmetica ; ovvero a — b = c — d.

228. La proporzione geometrica si esprime così 3 : 12 :: 2 : 8, o 3 ; 12 = 2 : 8, o anche 3 | 12 || 2 | ; ovvero a : b = c : d, o $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Il primo e l'ultimo termine d'una proporzione chiamansi gli *estremi*; il secondo ed il terzo i *mezzi*.

229. Se poi uno stesso termine si prende due volte, in maniera che il conseguente della prima ragione sia antecedente alla seconda, si chiama allora proporzione *continua*. Come 6.4:4.2 è una *proporzion Aritmetica continua*, e si scrive così ÷ 6. 4. 2, ÷ a. b. c.

La proporzione *Geometrica continua* è 8:4::4:2, e si esprime ÷÷ 8.4.2, o ÷÷ a. b. c.

Il secondo termine della proporzione continua si chiama *mezzo proporzionale*.

230 Lorchè si scrivono di seguito più di due ragioni ugua i, si forma quel che si chiama una *serie di quantità proporzionali*: come 7.3:9.5:11.7 è una serie di quantità aritmeticamente proporzionali. E 3:12::2:8::5:20::7:28 è una serie di quantità geometricamente proporzionali.

Ma se le ragioni, che servon a formar queste serie, son tali, che il conseguente di ciascuna serve d' antecedente alla seguente ragione, la serie si chiama una *Progressione*. Come 3.6:6.9:9.12:12.15 è una *progressione aritmetica*, che per brevità si scrive così ÷ 3.6.9.12.15.

Nella stessa maniera 32:16::16:8::8:4::4:2 è una *progressione geometrica*, che si esprime così ÷÷ 32. 16. 8. 4. 2.

231. Dunque una progressione aritmetica *è una serie di termini che presi consecutivamente, han sempre una stessa differenza*.

Ed una progressione geometrica è *una serie di termini, che divisi consecutivamente l' un per l'altro han sempre uno stesso quoziente*.

Pro-

Proprietà delle Ragioni e Proporzioni Aritmetiche.

232. *Ogni rapporto aritmetico può ridurſi a queſta formola generale a. a+d.* Vale a dire; il conſeguente d'una ragion aritmetica è ſempre ugual all'antecedente *a* più o meno la loro differenza *d*.

Sia *a* l'antecedente d'una ragione, e *d* la differenza, che paſſa tra lui ed il ſuo conſeguente. Se l'antecedente *a* è maggiore del ſuo conſeguente, è chiaro che detto conſeguente ſarà a —— d. E ſe l'antecedente è minore del ſuo conſeguente, eſſo conſeguente ſarà a + d. Dunque in ogni rapporto aritmetico il conſeguente è ugual all'antecedente più o meno la loro differenza. Dunque ogni rapporto aritmetico può eſſer eſpreſſo per a. a+d.

Nella ſteſſa guiſa data una quantità *b*, e la ſua differenza *d* riguardo un'altra quantità, il rapporto aritmetico tra queſte due quantità ſarà b. b+d.

233. Onde una proporzione aritmetica può eſſer eſpreſſa così a. a+d : b. b+d.

234. Dunque in una proporzione aritmetica *la ſomma degli eſtremi è ugual alla ſomma de' mezzi.*

E' chiaro, che nella proporzione a. a+d : b. b+d, la ſomma degli eſtremi a+b+d è la ſteſſa che quella de' mezzi a+d+b.

Dunque in qualunque proporzioone aritmetica eſpreſſa da termini differenti a. b: c. d, ſempre ſi avrà l'equazione a+d = b+c. E reciprocamente la data equazione può ridurſi a proporzione aritmetica a.b:c.d.

235. In una proporzione aritmetica continua *la ſomma degli eſtremi è ugual al doppio del mezzo.*

Perchè ÷ a. b. c è lo ſteſſo che a. b: b. c, dunque a+c = 2b.

236. In una proporzione aritmetica è facile trovar

un termine incognito. Sia a.b:c.x, sarà à + x = b + c, e x = b + c − a.

Dunque in una proporzione aritmetica *il quarto termine è ugual alla differenza, che passa tralla somma de' mezzi ed il primo termine.*

237. Se si cerca un mezzo aritmetico proporzionale tra *a* e *b*, si faccia ∴ a.x.b. Sarà a + b = 2x; e $x = \frac{a+b}{2}$.

Dunque *il mezzo proporzional aritmetico è ugual alla metà della somma degli estremi.*

Della Progressione Aritmetica.

238. *Ogni progressione aritmetica, di cui* p *sia il primo termine, e* d *la differenza, può esprimersi così* ∴ p. p + d. p + 2d. p + 3d. p + 4d &c.

Essendo una progressione aritmetica una serie di termini, che presi consecutivamente han sempre una stessa differenza, ed essendo la differenza tra il primo ed il secondo termine + d, ne siegue che anche la differenza tra il 2.° ed il 3.° termine sarà + d. Dunque se il 2.° termine è p + d, il 3.° dovrà essere p + d + d, cioè p + 2d &c.

La predetta Formola generale comprende le due specie di progressioni *crescenti* e *decrescenti*. La proporzione *crescente* è ∴ p. p + d. p + 2d. p + 3d &c.: la *decrescente* è ∴ p. p − d. p − 2d. p − 3d &c.

239. *In ogni progressione aritmetica la somma de' termini ugualmente lontani dagli estremi è sempre costante; cioè sempre uguale alla somma degli estremi, o alla somma di due altri termini qualunque ugualmente lontani da questi estremi; o al doppio del termine di mezzo, se la progressione ha un numero impari di termini.*

Nella

Nella progressione ∴ p. p + d. p + 2d. p + 3d. p + 4d. p + 5d. p + 6d &c. è evidente che la somma degli estremi p + p + 6d, è ugual alla somma del 2.° e 6.° termine p + d + p + 5d ; siccome questa è ugual al doppio del termine di mezzo p + 3d = 2p + 6d.

240. *In una progressione aritmetica, un termine qualunque è ugual alla somma del primo termine e del prodotto della differenza comune per il numero de' termini precedenti.*

Nella predetta progressione il 6.° termine p + 5d è composto del primo *p*, e del prodotto della differenza *d* per il numero 5 de' termini che precedon il sesto.

241. *In una progressione aritmetica, la differenza tra il primo e l' ultimo termine è ugual al prodotto della differenza comune per il numero de' termini di tutta la progressione meno* 1.

La differenza tra il primo termine *p* e l' ultimo p + 6d è 6d. Or questo 6d non è altro che la differenza comune *d* moltiplicata per 6, che è il numero de' 7 termini meno 1.

242. *La somma di tutti i termini d' una progressione aritmetica è ugual alla metà del prodotto della somma degli estremi moltiplicata per il numero di tutti i termini ; ovvero al prodotto del termine di mezzo (se il numero de' termini è impari) per il numero di tutti i termini.*

Onde 2p + 6d somma degli estremi, moltiplicata per 7 numero di tutti i termini, e divisa per 2, cioè $\frac{14p+42d}{2}$, o 7p + 21d = p + p + d + p + 2d + p + 3d + p + 4d + p + 5d + p + 6d, che ridotta diviene 7p + 21d.

243. *Una progressione aritmetica può aver zero per uno de' suoi termini.*

Perchè tra zero ed un numero qualunque vi è sempre una differenza ugual a questo numero.

Si può dunque continuar una progressione decrescente

te quanto si vorrà. Se si ha per esempio, questa progressione ÷ 16.12.8.4.0, si può continuarla così ÷ 16. 12. 8. 4. 0. — 4. — 8. — 12. — 16 &c.

Ogni progressione dunque ha due braccia, l'uno crescente, l'altro decrescente, che si estendono in senso contrario, e tutti due si perdono nell'infinito: vale a dire, che una progressione non ha nè principio nè fine, nè noi possiamo conoscerne che un punto preso nel mezzo: questa è la figura del tempo paragonato all'eternità. Così ÷ 11.6.1 può continuarsi in ÷ 11.6. 1. — 4. — 9. — 14. — 19 &c.

Si osservi però, che il zero non può entrar in alcun rapporto geometrico, poichè non può contenere, nè esser contenuto.

244. In ogni progressione aritmetica si possion distinguere cinque principali elementi

il primo termine ——————— p
l'ultimo ——————————— u
la differenza ——————————— d
il numero de' termini ———————— n
la somma de la progressione ——————— s

Or dati tre di questi cinque elementi, si conosce subito uno degli altri due incogniti.

Se si suppone la progressione *crescente*, si può convertir in *decrescente*, chiamando il suo primo termine *u*, e l'ultimo *p*.

Dall'art. 241. risulta l'equazione $u - p = dn - d$, e dall'articolo 242. risulta quest'altra equazione $s = \frac{pn + un}{2}$.

Or da queste due equazioni ricavansi le 20 formole seguenti che risolvon tutti i casi possibili per trovare in una progression aritmetica una delle due incognite essendo note le tre altre.

Prima Equaz. principale. $n - p = dn - d$

2.a Equazione principale. $s = \frac{pn + un}{2}$

Formole

Formole tratte da queſta equazione.

1.ª $u = p + dn - d$

2.ª $p = u - dn + d$

3.ª $d = \frac{u-p}{n-1}$

4.ª $n = \frac{u-p}{d} + 1$

Applicazione delle 20 formole algebraiche alla progreſſione creſcente ÷ 2. 4. 6. 8. 10

1.ª $10 = 2 + 2 \times 5 - 2 = 2 + 10 - 2$

2.ª $2 = 10 - 2 \times 5 + 2 = 10 - 10 + 2$

3.ª $2 = \frac{10-2}{5-1} = \frac{8}{4}$

4.ª $5 = \frac{10-2}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1$

2.ª Equazione principale.

$$s = \frac{pn+un}{2}, \text{ o } 2s = pn + un$$

Formole tratte da queſta Equazione.

5.ª $n = \frac{2s}{p+u}$

6.ª $p + u = \frac{2s}{n}$

7.ª $p = \frac{2s}{n} - u$

8.ª $u = \frac{2s}{n} - p$

5.ª $5 = \frac{60}{2+10} = \frac{60}{12}$

6.ª $2 + 10 = \frac{60}{5}$

7.ª $2 = \frac{60}{5} - 10$

8.ª $10 = \frac{60}{5} - 2$

3.ª Equazione principale.

$2s = 2pn + dn^2 - dn$

Formole tratte da queſta Equazione.

Queſta Equazione è formata dalla ſeconda equazione principale $2s = pn + un$, in cui ſi fa entrar il valore di $u = p + dn - d$ (*prima formola*).

$$9.^a\ s = \frac{2pn + dn^2 - dn}{2}$$

$$10.^a\ s = pn + \frac{dn^2 - dn}{2}$$

$$11.^a\ p = \frac{s}{n} - \frac{dn}{2} + \frac{d}{2}$$

$$12.^a\ d = \frac{2s - 2pn}{n^2 - 2}$$

Quarta Equazione principale.

$$2s = 2un - dn^2 + dn$$

Formole tratte da questa Equazione.

$$13.^a\ s = \frac{2un - dn^2 + dn}{2}$$

$$14.^a\ s = un - \frac{dn^2 + dn}{2}$$

$$15.^a\ u = \frac{s}{n} + \frac{dn}{2} - \frac{d}{2}$$

$$16.^a\ d = \frac{2un - 2s}{n^2 - n}$$

$$9.^a\ 30 = \frac{20 + 50 - 10}{2} - \frac{60}{2}$$

$$10.^a\ 30 = 10 + \frac{50 - 10}{2} - 10$$

$$+ \frac{40}{2}$$

$$11.^a\ 2 = \frac{30}{5} - \frac{10}{2} + \frac{2}{2} - 6$$

$$5 + 1$$

$$12.^a\ 2 = \frac{60 - 20}{25 - 5} - \frac{40}{20}$$

Questa Equazione è formata dalla seconda principale $2s = pn + un$, in cui si fa entrar il valore di $p = u - dn + d$ (*formola* 2.a)

$$13.^a\ 30 = \frac{1000 - 50 + 10}{2} - \frac{60}{2}$$

$$14.^a\ 30 = 50 - \frac{50 + 10}{2} - 50$$

$$- \frac{40}{2}$$

$$15.^a\ 10 = \frac{30}{5} + \frac{10}{2} - \frac{2}{2} -$$

$$6 + 5 - 1$$

$$16.^a\ 2 = \frac{100 - 60}{25 - 5} - \frac{40}{20}$$

Quin-

Quinta Equazione principale.

$$2s = pn + un + \frac{u^2 - p^2}{d}$$

Questa Equazione è formata dalla seconda principale $2s = pn + un$, in cui si fa entrar il valore

$$n = \frac{u - p}{d} + 1 \quad (\textit{formola } 4.^{a}_{2})$$

Formole tratte da questa Equazione.

$$17.^{a}\ s = \frac{p + u}{2} + \frac{u^2 - p^2}{2d}$$

$$18.^{a}\ p = \tfrac{1}{2}d + \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + ud + u^2 - 2ds}$$

$$19.^{a}\ u = -\tfrac{1}{2}d + \sqrt{\tfrac{1}{4}d^2 + 2ds + p^2 - pd}$$

$$20.^{a}\ d = \frac{u^2 - p^2}{2s - p - u}$$

$$17.^{a}\ 30 = \frac{2 + 10}{d} + \frac{100 - 4}{4}$$

$$= 6 + 24$$

$$18.^{a}\ 2 = 1 + \sqrt{1 + 20 + 100 - 120} = 1 + \sqrt{1} = 1 + 1$$

$$19.^{a}\ 10 = -1 + \sqrt{1 + 120 + 4 - 4} = -1 + \sqrt{121} = -1 + 11.$$

$$20.^{a}\ 2 = \frac{100 - 4}{60 - 10} = \frac{96}{48}$$

Con queste formole si risolvon tutti i problemi di progressione Aritmetica.

245. Si possono paragonare due progressioni, sommarie, e sottrarle per ritolver le quistioni più complicate.

246. Ma nella sottrazione convien osservare che la maggior progressione non è quella che presenta i maggiori termini, ma quella di cui la differenza è più grande.

Pro-

Problemi sulle Progressioni Aritmetiche.

247. Probl. 1.° *Inserire un numero m di mezzi proporzionali tra due termini dati p ed u, onde ne risulti una progressione Aritmetica.*

Soluzione. Considerando *p* ed *u* come estremi, sarà certamente m + 2 il numero de' termini della progressione, giacchè *m* è il numero de' termini da inserirsi fra i due estremi. Son noti dunque tre elementi, il il primo e l'ultimo termine, ed il loro numero; non si ha che trovar la differenza, ed il problema è sciolto. Dunque la 3.ª formola $d = \frac{u-p}{n-1}$ ne dà la soluzione.

Supposto p = 2, u = 20, m = 8, sarà n = m + 2 = 10, e $d = \frac{u-p}{n-1} = \frac{20-2}{10-1} = \frac{18}{9} = 2$. Dunque si avrà questa progressione ÷ 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20.

Probl. 2.° *Due viaggiatori partono nello stesso istante da due luoghi opposti lontani 135. leghe. Il primo regola il suo cammino per giorno secondo i termini* ÷ 1. 5. 9 *&c. ed il secondo in quest' altra guisa* ÷ 4. 7. 10 *&c. In qual giorno s' incontreranno, e quanto ciascuno avrà fatto?*

Sol. Concorrendo le progressioni allo stesso scopo, bisogna sommarle. La somma di queste progressioni.

÷ 1. 5. 9
÷ 4. 7. 10

è ——— ——— ——— ——— ——— ——— ... ÷ 5. 12. 19, di cui essendo noti tre elementi, p = 5, d = 7, s = 135, non si ha da trovar altro ch' *n*, cioè il numero de' termini, ed il problema è sciolto. Servendosi dunque

que della terza equazione principale $2s = 2pn + dn^2 - dn$, e facendo le operazioni neceſſarie, ſi ha $n = 6$. Dunque s'incontreranno al 6.° giorno.

Per ſoddisfar poi alla ſeconda parte del problema, ſi trovino (formola 9.ª) le ſomme particolari delle due prime progreſſioni, la ſomma di ÷ 1. 5. 9 è 66 } 135
e la ſomma di —— —— . . ÷ 4. 7. 10 è 69 }

Dunque il primo viaggiatore ha fatto in 6 giorni 66 leghe, e l'altro 69.

Probl. 3.° *Due viaggiatori partono nel medeſimo iſtante da uno ſteſſo luogo verſo una ſteſſa parte, regolando il lor cammino per giorno, il primo ſecondo queſta progreſſione* ÷ 1. 5. 9, *e l'altro* ÷ 4. 7. 10. *Si domanda, quando il primo raggiungerà il ſecondo.*

Sol. Sottraendo la più piccola progreſſione (246) che è la ſeconda, dalla prima,

÷ 1. 5. 9
÷ 4. 7. 10

la differenziale ſarà . . . . . ÷ — 3. — 2. — 1. E' chiaro che quando il primo raggiungerà il ſecondo, avran fatto entrambi lo ſteſſo cammino; dunque le ſomme delle loro progreſſioni riſpettive ſaranno uguali, ed in conſeguenza la differenziale di tali ſomme ſarà 0.

Sono dunque cognite $p = -3$, $d = 1$, $s = 0$; dunque (per la terza equazione principale $2s = 2pn + dn^2 - d2$) ſarà $n = 7$. Vale a dire il primo raggiungerà il 2.° al 7.° giorno, e ciaſcuno avrà fatto 91. leghe.

Probl. 4.° *Una barca di fuggitivi fa* 12 *leghe al giorno, e tende al rifuggiarſi al proſſimo porto lontano* 50 *leghe. Un vaſcello che la inſeguiſce, veleggia in queſta progreſſione* ÷ 6. 11. &c. *Saranno i fuggitivi raggiunti? In qual giorno? E in qual diſtanza dal porto?*

Sol. E' la prima progreſſione, di cui la differenza è 0, che

0, che si deve sottrarre dalla seconda $\frac{-}{-}$ 6. 11
$\frac{-}{0}$ 12. 12

Si avrà dunque questa differenziale progressione $\frac{-}{-}$ —6.—1

Conoscendosi $p = -6$, $d = 5$, $s = 0$, si avrà (per la 3.ª equazione principale $2s = 2pn + dn^2 - dn$)

$$n = \frac{2p}{d} + 1 = \frac{12}{5} + 1 = 3\frac{2}{5}.$$

I fuggiaschi dunque saranno raggiunti ne' $\frac{2}{5}$ del quarto giorno, lungi dal porto leghe $9\frac{1}{5}$, dopo $40\frac{4}{5}$ di cammino.

Delle Ragioni e Proporzioni Geometriche.

248. Si è definita (225) la ragione Geometrica *quante volte una quantità contien un' altra*. Dunque la ragion Geometrica consiste *nel quoziente della divisione di due quantità*. La ragione Geometrica di 4 a 8 sarà $\frac{8}{4} = 2$.

Dunque *una frazione è una ragione Geometrica*; il suo numeratore n'è il conseguente, ed il suo denominatore è l'antecedente.

249. Lorchè l'antecedente è maggiore del conseguente, il quoziente della ragione Geometrica è una frazione minore dell'unità.

Come la ragione di 8 a 4 $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. E quando l'antecedente è più piccolo, il quoziente è maggiore dell'unità; come 4 e 8 $= \frac{8}{4} = 2$.

250. Si chiama ragione *di numero* a *numero* quella, di cui il quoziente non è una quantità inesprimibile o incommensurabile: come 7 a 11 è $\frac{11}{7}$.

Dicesi ragione *irrazionale* o *sorda* quella di cui il quoziente non può esprimersi esattamente nè per intieri nè per frazioni.

Come la ragione di 4 a $\sqrt{3}$ è *sorda*, perchè è impossibile trovar un numero intiero o rotto che esprima il valor esatto di $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Non

Non ſiegue però da ciò, che due incommenſurabili ſieno ſempre in ragion ſorda; perchè l'uno può eſſer eſattamente doppio, triplo &c. dell'altro.

251. Quando l'antecedente contiene *due*, tre volte &c. eſattamente il ſuo conſeguente, ſi chiama il loro rapporto una ragione *dupla*, *tripla* &c: come la ragione di 48 a 6 è *ottupla*. Se poi l'antecedente è contenuto *due*, *tre* volte &c. eſattamente nel ſuo conſeguente, diceſi ragione *ſudduplà*, *ſuttripla*: come la ragione di 4 a 12 è *ſuttripla*.

252. Se ſi moltiplicano per ordine i termini di più ragioni, cioè gli antecedenti per gli antecedenti, ed i conſeguenti per i conſeguenti, i prodotti formano una *ragion compoſta* di ciaſcuna di queſte ragioni. Come date queſte tre ragioni a: d, b: e, c: f, *la ragion compoſta* è abc: def, e ciaſcuna di quelle ragioni chiamaſi una delle radici della ragion compoſta.

Una ragion compoſta di ragioni uguali diceſi una ragione *duplicata*, *triplicata*, *quadruplicata* &c., ſe ha *due*, *tre*, *quattro* &c. radici: così ſe ſi compongono le ragioni uguali 2: 4, 6: 12, 3: 6; ſi avrà la ragion triplicata 36: 288.

253. *Il valore d'una ragione non cambia, ſe ſi moltiplicano, o ſi dividono i ſuoi due termini per una ſteſſa quantità.*

254. Perciò le frazioni, che ſon lo ſteſſo che ragioni Geometriche, non cambian valore, ſe i loro termini ſi moltiplicano, o ſi dividono per la ſteſſa quantità.

255. Quindi due quantità qualunque ſon fra loro nella ſteſſa ragione che paſſa fra i loro doppj, i loro tripli, i loro quadrupli &c, o fralle loro metà, terzi, quarti &c.

Lo ſteſſo è dire, che i valori delle frazioni, le quali hanno gli ſteſſi denominatori, ſon fra loro come i numeratori. Così $a : b :: \frac{a}{2} : \frac{b}{2} :: \frac{a}{3} : \frac{b}{3} ::: \frac{a}{p} : \frac{b}{p}$ &c.

256. Teorema fondamentale. *Ogni ragion Geometri-*

ca

ca può esprimersi con questa formola a : aq , ovvero b: bq. &c.

I: che significa, che *il conseguente d' una ragion Geometrica è sempre ugual al prodotto dell' antecedente per il loro quoziente* .

Poichè il quoziente d'una ragione è quel che risulta dalla divisione del conseguente per l'antecedente , è chiaro che questo conseguente ch'è il dividendo, deve esser ugual al prodotto del quoziente per l antecedente ch'è il divisore . Dunque in generale ogni rapporto Geometrico, di cui l'antecedente è *a*, e 'l quoziente è *q* , può esprimersi per a: aq : Ed ogni rapporto Geometrico che ha per antecedente *b* e per quoziente q, può esprimersi per b: bq .

257. *Una ragione duplicata è ugual a quella de' quadrati de' termini d' una delle due ragioni qualunque, che ne sono le radici . Ed una ragione triplicata è ugual a quella de' cubi de' termini d' una delle tre ragioni qualunque che ne sono le radici* . E così dell' altre potenze .

Dimostrazione . Se queste due ragioni a: aq , b: bq son uguali , la ragion duplicata è ab: abq^2. Or è evidente che ab: abq^2:: a^2: a^{2}q^2:: b^2: b^{2}q^2, perchè queste ragioni hanno lo stesso quoziente q^2 .

Così se le tre ragioni a: aq , b: bq , c: cq son uguali , la ragione triplicata è abc: abcq^3. Or è chiaro che abc: abcq^3:: a^3: a^{3}q^3:: b^3: b^{3}q^3:: c^3: c^{3}q^3.

Le ragioni *sudduplicate* , *sottriplicate* son quelle delle radici quadrate , cubiche &c.

258. L' uguaglianza di due ragioni geometriche forma la proporzione geometrica (226).

Dunque *ogni proporzione geometrica può ridursi a questa formola* a: aq::b:bq .

Perchè due ragioni uguali devon avere uno stesso quoziente .

259. Se due ragioni son fra loro in maniera che se una è dupla o tripla &c. anche l' altra è dupla o tripla: allora la prima dicesi esser in *ragion diretta semplice* dell'altra, Come 8: 4 , 6: 3 .

Ma

Ma se la prima cresce nella stessa ragione che l'altra diminuisce, allora quella dicesi in ragion *inversa* o *reciproca* di quella. Come 8 : 4, 3 : 6.

E' palpabile, che quattro termini in ragion inversa, possono ridursi in ragion diretta col mutar un antecedente in conseguente, ed un conseguente in antecedente. Onde la ragion inversa 8 : 4 :: 3 : 6 divien diretta 4 : 8 :: 3 : 6.

Ma senza disordinar i termini si può una ragion inversa ridurre a diretta, se i due termini d'una di queste ragioni si metton in frazione, di cui il numeratore sia 1. Onde la ragion inversa 8 : 4 :: 3 : 6, divien diretta $\frac{1}{8} : \frac{1}{4} :: 3 : 6$.

Proprietà delle Proporzioni Geometriche.

260. *In ogni proporzione geometrica il prodotto degli estremi è ugual al prodotto de' mezzi.*

E' evidente che a : aq :: b : bq, a × bq = aq × b.

261. Dunque ogni equazione può cambiarsi in proporzione : abq = abq diviene a : aq :: b : bq; e ad − bd = cg = c diviene a − b : g + 1 :: c : d; come $1 - x^2 = a$ diviene 1 − x : a :: 1 : 1 + x; e $x^2 - y^2 = 1$ diviene x + y : 1 :: 1 : x − y &c.

262. Quattro termini in proporzione geometrica possono disporsi in diverse maniere senza cessar d'esser geometricamente proporzionali. Se il primo termine è al 3.° come il 2.° al 4.°, dicesi *alternando*. Se il 2.° è al primo come il 4.° è al 3.°, dicesi *invertendo*. Se la somma del primo e del 2.° è al 2.°, come la somma del 3.° e del 4.° è al 4.°, dicesi *componendo*. Se la differenza tra il primo e 'l 2.° è al 2.°, come la differenza tra il 3.° e 'l 4.° è al 4.°, dicesi *dividendo* &c.

a : b :: c : d	
a : c :: b : d	alternando
b : a :: d : c	invertendo
a + b : b :: c + d : d	componendo
a − b : b :: c − d : d	dividendo

In tutte queſte ed altre mutazioni reſta ſempre la proporzione geometrica, poichè il prodotto degli eſtremi trovaſi ſempre ugual al prodotto de' mezzi.

263. Quindi facilmente ſi ricava, che nè la Compoſizione, nè la riſoluzione delle ragioni cambia punto la proporzione. Onde ſe $a:b::c:d$, ſarà $a^2b^2:b^2::c^2d^2:d^2$, e $\sqrt{a}:\sqrt{b}::\sqrt{c}:\sqrt{d}$, ſempre il prodotto degli eſtremi è ugual a quello de' mezzi.

Problemi ſulle Proporzioni Geometriche.

264. Probl. 1.° *Trovar uno de' quattro termini d' una proporzione, di cui ſi conoſcono gli altri tre.*

Sia x il termine incognito. Si metta queſto x in proporzione cogli altri al ſuo luogo conveniente. Si faccia un' equazione del prodotto degli eſtremi e di quello de' mezzi. Si troverà x in uno di queſti prodotti, e colla diviſione ſi conoſcerà il ſuo valore.

Quindi ſi trae queſta regola generale: *In una proporzione, un termine qualunque, ſe è mezzo, ſarà ugual al prodotto degli eſtremi diviſo per l' altro mezzo; e ſe è eſtremo, ſarà ugual al prodotto de' mezzi diviſo per l' altro eſtremo.*

Come $a:x::b:c$, $xb=ac$, $x=\frac{ac}{b}$: E $a:b::c:x$, $ax=bc$, $x=\frac{bc}{a}$.

Su queſta ſoluzione è fondata la famoſa *regola del tre*, che per il ſuo grand' uſo vien anche detta *regola d' oro*.

265. La *regola del tre* in pratica è diſtinta in due ſpecie. Diceſi *regola del tre diretta*, lorchè l' incognito deve eſſer tanto più grande o più piccolo riſpetto al 3.° dato, quanto il 2.° termine dato è più grande o più piccolo riſpetto al primo. In tal caſo convien porre x al 4.° termine della proporzione, e ſervirſi della formola $x=\frac{bc}{a}$: onde *la regola del tre diretta ſi fa*

fa col moltiplicar il 2.° termine per il 3.°, e col dividere il prodotto per il primo termine ; il quoziente è il termine cercato.

Probl. 2.° , 36 teſe d'opera han coſtato 60. ſcudi , 48 teſe quanto coſteranno? Queſta è una *regola del tre diretta*, poichè la ſpeſa incognita che ſi cerca , deve eſſer a 48 teſe come la ſpeſa data 60 è a 36 teſe. Dunque $36 . 60 :: 48 : x = \frac{48 \times 60}{36} = 80$.

L'altra *regola del tre* diceſi *inverſa*, lorchè l'incognito deve eſſer tanto maggior o minore del 3°. dato, quanto il 2°. è minore o maggior rapporto al primo. In tal caſo convien collocar x al 2°. o al 3°. termine, e ſervirſi della formola $x = \frac{ac}{b}$: onde *nella regola del tre inverſa convien moltiplicar il primo dato per il 3.°, e divider il prodotto per il 2°. termine dato ; il quoziente ſarà il 4°. termine cercato.*

Probl. 3°. , 20 uomini han fatto in un giorno 45 teſe d'opera , per farne 81 teſe , quanti uomini ci vorranno?

Queſta è una *regola del tre inverſa*, perchè il numero degli uomini cercato deve eſſer ad 81 teſe , come reciprocamente 45 teſe a 20 uomini . Onde $20 : 45 :: x : 81$, $45x = 81 \times 20$, $x = \frac{81 \times 20}{45} = 36$.

La regola del tre è inverſa, quando ſi ſon mal diſpoſti i termini della quiſtione. E' chiaro che la precedente avrebbe dovuto proporſi : Se per fare 45 teſe d'opera ci han voluto 20 uomini, per farne 81 quanti uomini ci vorranno?

266. Tutte *le regole di compagnia , di ſocietà , di alliaggio ec.* per quanto complicate ſieno , ſi riducono a molte proporzioni ſemplici , delle quali ſi troveranno i termini incogniti per la *regola del tre diretta*.

Probl. 4.° , 20 *uomini in* 15 *giorni han fatto* 160 *teſe di opera ; in* 12 *giorni* 30 *uomini quante ne faranno?*

Queſto problema ſi riduce a queſte due propoſizioni Se 20 uomini han fatto 160 teſe d'opera in un certo tempo, 30 uomini nello ſteſſo tempo quante ne faranno? Riſpoſta 240.

E ſe in 15 giorni queſti uomini han fatto 240 teſe, gli ſteſſi uomini in 12 giorni quante ne faranno ? Riſpoſta 192.

uom. teſe uom. teſe

$$1.^a\ 20 : 160 :: 30 : x = \frac{160 \times 30}{20} = 240.$$

gior. teſe gior. teſe

$$2.^a\ 15 : 240 :: 12 : x = \frac{240 \times 12}{15} = 192.$$

Ovvero a queſte due altre.

gior. teſe gior. teſe

$$1.^a\ 15 : 160 :: 12 : x = \frac{160 \times 12}{15} = 128.$$

uom. teſe uom. teſe

$$2.^a\ 20 : 128 :: 30 : x = \frac{128 \times 30.}{20} = 192$$

Queſte quiſtioni ſi riſolvon anche ſenza l'ajuto delle proporzioni . Nel propoſto eſempio baſta cercar da principio quant'opera fa un uomo al giorno , dicendo 160 teſe in 15 giorni ſono $\frac{160}{15}$ al giorno , di cui la vigeſima parte, ovvero $\frac{160}{15 \times 20}$ è l'opera d'un uomo al giorno . Ciò poſto 30 uomini faranno al giorno 30 X 160

$X \frac{160}{15 \times 20} = \frac{30 \times 160}{15 \times 20}$, e per conseguenza in 12 giorni eglino faranno $\frac{12 \times 30 \times 160}{15 \times 20} = 192$.

Probl. 5.° Nella stessa maniera, se si proponesse questa quistione, che gli Aritmetici chiaman regola del sette: 10 *misure di biada, ciascuna del peso di* 240 *libre, han nudrito per* 4 *giorni* 525 *soldati: con* 17 *misure pesanti ciascuna* 320 *libre, per quanti giorni si potran nudrire* 217 *soldati?*

Si cerchi prima quanto un soldato consuma al giorno, dicendo: 10 volte 240 libre consumate in 4 giorni fanno $\frac{10 \times 240}{4}$ al giorno, di cui la 525.ª parte, ovvero $\frac{10 \times 240}{4 \times 525}$ è il consumo giornaliero di ciascun soldato. Ciò posto, 17 volte 320 libre divise per 217, o $\frac{17 \times 320}{217}$ esprime quel che ciascun soldato ha per consumare, in maniera che dividendo questa quantità per $\frac{10 \times 240}{4 \times 525}$, la qual esprime il consumo giornaliero di ciascun soldato, si ha $\frac{17 \times 320 \times 4 \times 525}{10 \times 240 \times 217} = 21\frac{58}{62}$ sarà il numero de' giorni richiesto.

Probl. 6.° *Tre Mercanti han fatto un fondo di* 12000 *scudi. Pietro vi ha posto* 2000, *Giacomo* 4000, *e Giovanni* 6000. *Si è guadagnato* 2400. *Quanto sarà il lucro di ciascuno?*

Si faccian tante proporzioni quante sono le incognite, dicendo: il fondo è al lucro totale, come la contribuzione particolare è al lucro particolare.

1.ª 12000 : 2400 :: 2000 Pietro $= \frac{2400 \times 2000}{12000} = 4^{00}$

ſuo lucro.

2.ª 12000 : 2400 :: 4000 Giac. $= \frac{2400 \times 4000}{12000} = 800$

ſuo lucro.

3.ª 12000 : 2400 :: 6000 Gio. $= \frac{2400 \times 6000}{12000} = 1200$

ſuo lucro.

Queſte regole complicate poſſon anche riſolverſi per mezzo della *regola di faſa poſizione*. Queſta conſiſte a metter in luogo de' termini incogniti altri termini ſuppoſti ad arbitrio, ma proporzionali a queſti incogniti, affin di trovare queſti incogniti per le regole del tre. Ma ſon ſuperflue, dacchè ſi hanno mezzi più brevi.

Delle Progreſſioni Geometriche.

267. Tutta la dottrina delle Progreſſioni Geometriche dipende da queſto principio: *il prodotto degli eſtremi è ugual al prodotto de' mezzi.*

268. *In una ſerie di termini proporzionali, la ſomma degli antecedenti è alla ſomma de' conſeguenti, come un antecedente qualunque è al ſuo conſeguente.*

Dimoſtr. Nella ſerie a: aq :: b : bq :: c : cq :: d : dq, è chiaro che $a + b + c + d : aq + bq + cq + dq :: b : bq$, perchè il prodotto degli eſtremi $bq \times a + b + c + d = b \times aq + bq + cq + dq$ prodotto de' mezzi.

269. In ogni progreſſione geometrica, come ∷ 1. 2. 4. 8, è da oſſervarſi, che di due termini conſecutivi il ſecondo non è che il primo moltiplicato per la *ragione comune*. Come 2 non è altro che 1 moltiplicato per 2 *ragion comune* della progreſsione; e 8 non è che 4×2.

Onde

Onde ogni progreſsione può ridurſi a queſta formola ∴ pr. pr^2. pr^3. pr^4. pr^5. pr^6. &c.

270. *In ogni progreſſione, un termine qualunque è ugual al primo moltiplicato per la* ragion comune *elevata a tanta potenza quanto è il numero de' termini precedenti.*

E' paleſe, che il 7.° termine pr^6 è ugual al primo p moltiplicato per la ragion comune *r* elevata alla ſeſta potenza. Così $pr^3 = p \times r^3$.

Queſto Teorema può eſprimerſi con queſta formola generale $t = pr^{n-1}$, in cui *t* ſignifica un termine qualunque, e *n* il numero del luogo che occupa *t* nella progreſsione.

271. *In ogni progreſſione i prodotti degli eſtremi, o quelli de' termini ugualmente lontani dagli eſtremi ſon uguali fra loro; o uguali al quadrato del termine di mezzo, ſe il numero de' termini è diſpari.*

Nella progreſsione ∴ p. pr. pr^2. pr^3. pr^4. pr^5. pr^6 &c., è chiaro che $p \times pr^6 = r \times pr^5 = pr^2 \times pr^4 = pr^3 \times pr^3$.

272. *In ogni progreſſione il primo termine è al 3°., come il quadrato del primo è al quadrato del 2°. Il primo termine è al 4°. come il cubo del primo è al cubo del 2°. E così degli altri.*

Dimoſtr. In queſta progreſſione ∴ p. pr. pr^2. pr^3. pr^4. pr^5 &c., è manifeſto che $p : pr^2 :: p^2 : p^2r^2$, perchè il prodotto degli eſtremi $p \times p^2r^2 = pr^2 \times p^2$ prodotto de' mezzi &c.

273. *La ſomma d'una progreſſione, non compreſovi il primo termine, è ugual alla ſomma di tutti i termini (eccetto l' ultimo) moltiplicata per la ragion comune.*

Dimoſtr. In queſta progreſsione ∴ p. pr. pr^2. pr^3, è evidente che $pr + pr^2 + pr^3 = p + pr + pr^2 \times r$.

Onde ſe la ſomma di tutta la progreſsione ſi dica *s*, ed *u* l'ultimo termine, ſarà $s - p = s - u \times r$, ovvero $s - p = sr - ur$, o $sr - s = ur - p$, o $s = \frac{ur - p}{r - 1}$.

Così in queſta progreſsione ∴ 3.9.27.81, ſoſtituendovi la formola antecedente, la ſua ſomma ſarà $s = \frac{ur-p}{r-1} = \frac{81 \times 3 - 3}{3-1} = 120$.

Dunque *in qualunque progreſſione Geometrica, la ſomma è ugual all' ultimo termine moltiplicato per la ragion comune meno il primo termine, diviſo per la ragion comune meno* 1.

274. Se r^0 è l'origine d' una progreſſione creſcente verſo la deſtra, può eſserlo ugualmente d' una decreſcente verſo la ſiniſtra, dove i ſuoi eſponenti ſaran negativi, r^{-1}, r^{-2} &c.

Dunque ogni progreſſione Geometrica, come l'Aritmetica, può concepirſi diviſa in due braccia, l' uno creſcente, l'altro decreſcente da p, che ſi eſtendono in ſenſo contrario, e tutti due ſi perdono nell'infinito. Ovvero ſarà un ſolo braccio creſcente o decreſcente in tutto il ſuo corſo, ſecondo il lato da cui ſi vorrà prenderlo, ma che non ha nè principio nè fine.

275. Tralla progreſſione Aritmetica e la Geometrica, non vi è altra differenza, ſe non che quella procede per addizione e per moltiplicazione, e queſta riſpettivamente per moltiplicazione e per eſaltazione.

276. In ogni progreſſione Geometrica ſi poſſon conſiderare cinque elementi principali:

il primo termine —— p
l' ultimo —— u
la differenza —— d
il numero de' termini —— n
la ſomma della progreſſione —— s

Or di queſti cinque elementi eſsendone noti tre qualunque, ſi conoſce uno degli altri due incogniti.

Problemi ſulla Progreſſione Geometrica.

277. Probl. 1.° *Dato il primo termine, e la ragion comune d' una progreſſione, trovar un termine qualunque.*

Soluz. $t = pr^{n-1}$ (270). Onde ſe il termine richieſto è l'undecimo d'una progreſſione, di cui ſia $p = 1$, $r = 4$, ſarà $t = 1 \times 4^{10} = 1048576$.

278. Probl. 2.° *Trovar la ſomma s d'una progreſſione geometrica, di cui ſi conoſce il primo termine* p, *l'ultimo* u, *e la ragion comune* r.

Soluz. In una progreſſione tutti i termini ſon antecedenti eccetto l'ultimo, e tutti i termini ſon conſeguenti eccetto il primo. Dunque la ſomma degli antecedenti è $s - u$, e la ſomma de'conſeguenti è $s - p$. Ma (273) $s - u : s - p :: p : pr$; dunque $spr - upr = sp - p^2$; ovvero $sr - ur = s - p$, e $sr - s = ur - p$; dunque $s = \frac{ur - p}{r - 1}$.

279. Probl. 3.° *Dato il primo termine* p, *il numero* n *de' termini, e la ragion comune* r, *trovar la ſomma* s.

Soluz. Poichè $a = pr^{n-1}$ (270), ſarà come nella ſoluzione antecedente $s - pr^{n-1} : s - p :: p : pr$; dunque $spr - pprr^{n-1} = sp - p^2$, ovvero $sr - prr^{n-1} = s - p$. Ma $rr^{n-1} = r^{n-1+1} = r^n$; dunque $sr - pr^n = s - p$. Dunque $s = \frac{pr^n - p}{r - 1}$.

280. Probl. 4.° *Data la ragion comune* r, *il numero de' termini* n, *e la ſomma* s, *trovar tutti i termini d'una progreſſione.*

Soluz. Eſſendo (273) $s = \frac{pr^n - p}{r - 1}$, ſarà $p = \frac{sr - s}{r^n - 1}$, ovvero $p = s \frac{r - 1}{r^n - 1}$. Or ſe il primo termine è $s \frac{r - 1}{r^n - 1}$,

moltiplicando questo primo termine per le potenze successive della ragion comune si avran tutti gli altri termini che saran per conseguenza $s\frac{r^2-r}{\quad}$, $s\frac{r^3-r^2}{\quad}$, $s\frac{r^n-1}{\quad}$, $s\frac{r^n-1}{\quad}$, $s\frac{r^4-r^3}{r^n-r}$ &c. $s\frac{r-1}{r^{n-1}-\frac{1}{r}}$, $s\frac{r-1}{r^{n-2}-\frac{1}{r^2}}$, $s\frac{r-1}{r^{n-3}-\frac{1}{r^3}}$ &c.

281. Probl. 5.° *Dati* p, u, n, *trovare* r.

Soluz. Essendo $u = pr^{n-1}$, sarà $r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{p}}$.

282. Probl. 6.° *Dati* p, u, r, *trovar* n.

Soluz. Poichè $r = \sqrt[n-1]{\frac{u}{p}}$, sarà $r^{n-1} = \frac{u}{p}$, e moltiplicando questa equazione per r, sarà $r^n = \frac{ur}{p}$.

Sia $p = 5$, $r = 3$, $u = 3645$. Sarà $\frac{ur}{p} = \frac{10935}{5} = 2187 = r^n$,

S'inalzi dunque *r* ovvero 3 a tal potenza finchè sia uguale a 2187.

Si vede che divien tale alla 7.ª potenza. Dunque $n = 7$.

Si avrebbe anche trovato più facilmente *n*, se si avesse diviso il Logaritmo di 2187 per 3, come si dirà altrove.

283. Probl. 7.° *Inserire de' mezzi proporzionali tra due termini dati.*

1.° Se tra *a* e *b* si vuol inserir un sol termine proporzionale, si avrà $\dot{\cdot}\dot{\cdot}$ a. x. b. Dunque $ab = x^2$; dunque $x = \sqrt{ab}$.

2.° Se tra *a* e *b* si voglion inserire due mezzi proporzionali, si avrà $\dot{\cdot}\dot{\cdot}$ a. x. y. b. Dunque $a : b :: a^3 : x^3$;

x^3; $ax^3 = ba^3$, $x^3 = \frac{a^3b}{a} = a^2b$, $x = \sqrt[3]{a^2b}$.

Avendo ora il primo ed il 2.° termine, facilmente si trova il 3.°; perchè sarà (272) $a : \sqrt[3]{a^2b} :: y : b$, e $a^3 : a^2b :: y^3 : b^3$. Dunque $a^2by^3 = a^3b^3$. $y^3 = \frac{a^3b^3}{a^2b}$ $= ab^2$; dunque $y = \sqrt[3]{ab^2}$.

3.° In generale, se tra a e b si ha da inserire un numero n di mezzi proporzionali, l'intervallo de' termini a e b sarà $n + 1$: onde (272) $a^{n+1} : a^{n+1} :: a : b$; dunque $x^{n+1} = \frac{a^{n+1}b}{a}$, e riducendo $x^{n+1} = a^nb$, ed estraendo la radice $x = \sqrt[n+1]{a^nb}$, o $x = a^{\frac{n}{n+1}}b^{\frac{1}{n+1}}$: questo è il valore del primo de' mezzi proporzionali richiesti. Con un calcolo consimile si troverà, che il 2.° è $\sqrt[n+1]{a^{n-1}b^2}$, il 3.° $\sqrt[n+1]{a^{n-2}b^3}$, il 4.° $\sqrt[n+1]{a^{n-3}b^4}$; e così di seguito finchè l'esponente di b sia divenuto $= n+1$, nel qual caso quello di a sarà $= 0$, ed il termine $\sqrt[n+1]{a^0b^{n+1}} = b$.

284. Probl. 8.° *Tra ciascun termine d'una progressione geometrica* $\div$ pr° pr¹. pr². pr³ &c. *inserir un numero qualunque* m *di mezzi proporzionali.*

Soluz. Inserisca si un numero qualunque *m* di mezzi proporzionali aritmetici tra gli esponenti consecutivi de' termini della data progressione (247), e si avranno gli esponenti della progressione cercata.

Se, per esempio, $m = 3$, si avrà $\div$ pr°. pr$^{\frac{1}{4}}$. pr$^{\frac{1}{2}}$. pr$^{\frac{3}{4}}$. pr¹. pr$^{\frac{1}{4}}$. pr$^{\frac{1}{2}}$. pr$^{\frac{3}{4}}$. pr². &c.

285. Probl. 9.° *Da un barile contenente* 20 *caraffe di vino un ladro domestico ne leva una caraffa al giorno,*

giorno, e ve ne mette una di acqua. In capo a 4 giorni quanto vino avrà egli rubato?

Soluz. $a = 20$, $n = 4$. Dopo il primo giorno il vino rimasto sarà $a - 1$.

Dopo il 2.° giorno il vino rimasto sarà $a - 1 - \frac{a+1}{a} = \frac{a^2-2a+1}{a} = a - 1 \times \frac{a-1}{a}$.

Dopo il 3.° giorno il vino rimasto sarà $\frac{a^2-2a+1}{a} - \frac{\frac{a^2-2a+1}{a}}{a} = \frac{a^2+2a-1}{a^2} - \frac{a^3-3a^2+3a-1}{a^3} = a - 1 \times \frac{a-1}{a}$.

Quindi si conosce che questa è una progressione geometrica, la di cui *ragion comune* è $r = \frac{a-1}{a} = \frac{20-1}{20} = \frac{19}{20}$, e il primo termine $p = a - 1 = 19$. Dunque il 4.° termine ch' è l'ultimo sarà (277) $u = pr^{n-1} = 19 \times \frac{19^3}{20^3} = \frac{130321}{8000} = 16\frac{2321}{8000}$: tanto dunque sarà il vino rimasto al 4.° giorno.

Or seguitando lo stesso giuoco, quanti giorni ci vorranno, affinchè nel barile resti tant' acqua che vino? Vale a dire 10 caraffe dell' uno, e 10 dell' altra.

In tal caso $u = 10$, $p = 10$, $r = \frac{19}{20}$, dunque il numero de' termini (282) $u = 13\frac{114368}{222764}$: vale a dire che ai 14 giorni la quantità del vino non differisce dalla quantità dell' acqua che quanto indica la frazione.

286. Probl. 10° *Trovar la somma d' una progressione*

ne infinita $\doteqdot \frac{a}{b} . \frac{a}{b^2} . \frac{a}{b^3}$ &c, *supponendo* $a < b$.

Soluz. Quì ſon noti tre elementi $p = \frac{a}{b}$, $r = \frac{a}{b}$, $n = \infty$ ſignifica *infinito*.

Si oſſervi che eſſendo $r = \frac{a}{b}$ è una frazione più piccola dell' unità, onde la progreſsione è decreſcente. Ogni progreſsione decreſcente ſi può render creſcente, col prender per primo termine quel ch' è ultimo, e per ultimo quel ch'è primo; e viceverſa. Dunque quì facendoſi creſcente queſta progreſſione, il primo termine ſarà pr^{n-1}, e l'ultimo ſarà p.

Dunque l'equazione (273) $s = \frac{pr^n - p}{r - 1}$, ſarà roveſciata in $s = \frac{p - pr^n}{1 - r}$, o ſia in $s = \frac{p - pr^\infty}{1 - r}$, perchè $n = \infty$.

Di quel pr^∞ non ſi deve far alcun conto, perchè $pr^\infty = \frac{a}{b} \times \frac{1}{b^\infty} = \frac{a}{b^\infty + 1}$, quantità infinitamente piccola, poichè è una grandezza finita diviſa per una quantità infinitamente grande.

Dunque $s = \frac{p}{1 - r}$. Soſtituendo dunque $\frac{a}{b}$ in luogo di p, ed $1 - \frac{a}{b}$ in luogo di $1 - r$; ſarà $s = \frac{p}{1-r} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{b-1}{b}} = \frac{a}{b-1}$.

Or se si suppone che $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ sarà la somma di tutta la progressione infinita $s = \frac{a}{b-1} = \frac{1}{2-1} = 1$.

Onde le progressioni seguenti:

$\frac{1}{1}$ .. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{27}$ &c. $= \frac{1}{2}$

$\frac{1}{1}$ .. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{25} \cdot \frac{3}{125}$ &c. $= \frac{3}{4}$

$\frac{1}{1}$ .. $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8}$ &c. $= 2$

287. Per dar un' idea degli accrescimenti rapidi, che riceve la somma d' una progressione geometrica in capo ad un numero (anche mediocre) di termini, eccone un esempio sulla progressione dupla, di cui per altro il cammino è uno de' più lenti.

L' inventore del giuoco degli scacchi fu pressato dal suo Sovrano a chiedergli una ricompensa proporzionata alla bellezza della sua invenzione. Dopo molte negative, finalmente l' inventore impegnato a mortificar ingegnosamente il Re, disse, che gli si dasse un granello di fromento per la prima casa del suo scacchiere, 2 per la 2.ª casa, 4 per la 3.ª, e così raddoppiando fin alla 64.ª.

La domanda sembrò da principio a tutta la Corte un niente, ma fatti i calcoli fu trovata ineseguibile, ed eccedente le ricchezze di tutti i Monarchi del Mondo.

1.° $p = 1$, $r = 2$, $n = 64$. Dunque $u = pr^n$, sarà $u = 1 \times 2^{64}$, e $s = \frac{pr^n - p}{r-1}$, sarà $s = \frac{1 \times 2^{64} - 1}{2-1} =$

$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$. A

2.° Un vasetto d' un pollice cubico contiene 450 granelli di fromento. Un moggio contiene 1728 di questi vasetti, dunque un moggio contiene $1728 \times 450 = 777600$ grani di fromento.

3.° Suppongasi un ricinto quadrato d' una lega di giro, o di 14400 piedi, convertito in granajo, in cui il -

il fromento ſia ammaſſato fin all' altezza di 20 piedi. Ciaſcun lato d'un tal granajo ſarà di 3600 piedi, dunque la ſua aja ſarà 3600 × 3600 = 12960000 piedi quadrati, che moltiplicati per l' altezza 20, daranno 259200000 piedi cubici di capacità.

4.° Ogni moggio è un piè cubico di fromento. Dunque il numero de' grani di fromento neceſſarj a riempiere il ſuppoſto granajo è 25920000 × 777600 = 20155492000000000.

Non reſta dunque che divider il primo numero 184 &c. A. per queſt' ultimo; il quoziente 91522 è il numero de' granaj neceſsarj per contener la quantità di fromento richieſta. Vi è inoltre una frazione che quì ſi traſcura, ma che farebbe la fortuna di ſei mila oneſte famiglie.

Chi ſi voleſſe dar la pena di far queſti calcoli, ſi accorgerebbe dell' utilità del Capitolo ſeguente.

CAPITOLO IV.

De' Logaritmi.

288. ALle Progreſſioni Geometriche ed Aritmetiche ſi riferiſce la dottrina de' *Logaritmi*.

Per intenderne chiaramente e diſtintamente la natura, ſi prendano le due ſpecie di progreſſioni Geometrica ed Aritmetica, e ſupponganſi i termini dell' una direttamente poſti ſotto i termini dell' altra.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128.
0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

In queſto caſo i numeri della progreſſion inferiore, ch'è Aritmetica, ſono quel che ſi chiaman *Logaritmi* della progreſſione ſuperiore che è Geometrica: vale a dire che *o* è logaritmo di 1; 1 è logaritmo di 2; 2 è logaritmo di 4 &c.

289. Dunque *Logaritmo* è un numero d' una progreſſione Aritmetica, il quale corriſponde ad un'altro numero d'una progreſſione Geometrica.

Queſti

Queſti *Logaritmi* ſono ſtati inventati per render il calcolo più ſpedito, come or ora ſi vedrà.

La parola *Logaritmo* è formata da due parole greche ſignificanti *ragione* e *numero*, cioè ragione de' numeri.

Per ben intendere la dottrina e l' uſo de' Logaritmi, convien eſſer attento alle propoſizioni ſeguenti.

290. Prop. I.ª *Supponendo o logaritmo di* 1, *il logaritmo del prodotto di due numeri qualunque, come* 4 *e* 8, *ſarà ſempre ugual alla ſomma* 5 *de' logaritmi delle due radici, o producenti.*

Dimoſtr. Le due propoſte progreſſioni lo rendon evidente. Poichè l4 (la lettera *l* ſignifica logaritmo del numero cui ella precede) e l8 ſono 2 e 3: or la ſomma di $2 + 3 = 5$, ed il prodotto di $4 \times 8 = 32$, infatti 5 è logaritmo di 32.

Deve eſſer neceſſariamente così, perchè eſſendo $4 \times 8 = 32$, ſi avrà queſta proporzione geometrica 1 : 4 :: 8 : 32, di cui i logaritmi devon eſſer in proporzione Aritmetica, onde ſi avrà l1. l4 : l8. l32.

Or in una proporzion Aritmetica la ſomma degli eſtremi è ugual alla ſomma de' mezzi; dunque $l1 + l32 = l4 + l8$.

Ma $l1 = 0$, dunque $l32 = l4 + l8$, cioè $5 = 2 + 3$.

291. Prop. II. *Il logaritmo del quoziente* 16 *del numero* 64 *diviſo per* 4, *è ugual alla differenza che paſſa fra* l64 *e* l4, *cioè* $l16 = l64 - l4$.

Dim. $\frac{64}{4} = 16$, dunque $64 \times 1 = 16 \times 4$, e 1 : 4 :: 16 : 64; dunque $l1 + l64 - l4 + l16$. Or $l1 = 0$, dunque $l64 = l4 + l16$, dunque $l64 - l4 = l16$. In fatti $6 - 2 = 4$.

292. Prop. III. *Il logaritmo d'un numero è la metà del logaritmo del ſuo quadrato.*

Dim. Prendaſi, per eſempio, 8; il ſuo quadrato è 64. Or $l8 = \frac{l64}{2}$; perchè $8 \times 8 = 64 \times 1$, dunque 1 : 8 :: 8 : 64, onde l1. l8 : l8. l64. Dunque $l1 + l64 =$

l8

$8 + 18 = 218$. Ma $l1 = 0$, dunque $164 = 218, 0 - \frac{164}{2} = 8$. Infatti $\frac{6}{2} = 3$.

293. Prop. IV. *Il logaritmo d'un numero è il terzo del logaritmo del suo cubo.*

Dim. Il cubo di 2 è 8; e poichè $4 \times 2 = 8 \times 1$, si avrà $1 : 4 :: 2 : 8$; onde $l1 . l4 : l2 . l8$. Ma per la dimostr. precedente $l4 = 2l2$, dunque $l1 . 2l2 : l2 . l8$, onde $l1 + l8 = 2l2 + l2 = 3l2$. Ma $l1 = 0$, dunque $l8 = 3l2$, $0 - \frac{l8}{3} = l2$. In effetto $\frac{3}{3} = 1$.

294. Le proprietà fin quì esposte han servito di fondamento alla costruzione delle Tavole de' Logaritmi, per mezzo delle quali si fanno per addizione e per sottrazione le operazioni, che si farebbe obbligato fare senza questo soccorso colla moltiplicazione e divisione. Onde con somma facilità si fa la Moltiplicazione, la Divisione, la Regola del tre, l' Elevazione delle potenze, l'Estrazione delle radici, come chiaramente si vede col ripigliare le due progressioni precedenti

∴	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
⋮	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7

295. *Moltiplicazione*. Volendosi moltiplicar 8 per 16, si prendan i logaritmi di questi numeri, che son 3 e 4. La loro somma 7 è il logaritmo corrispondente al numero 128, che è effettivamente il prodotto di $8 + 16$.

296. *Divisione*. Volendo divider 128 per 4, si trovino i loro logaritmi 7 e 2. La differenza di questi logaritmi $7 - 2 = 5$ il logaritmo del loro quoziente, che corrisponde a 32. Una frazione dunque, come $\frac{a}{b}$ riducendosi a logaritmi, diviene una sottrazione $a - b$; e l'esponente a^2 si converte in coefficiente $2a$.

297.

297. *Proporzione*. Per far una regola del tre per mezzo de' Logaritmi, convien ſommar i logaritmi de' termini che ſi avrebbero dovuto moltiplicare, e dalla ſomma ſottrarre il logaritmo di quel termine per cui ſi avrebbe dovuto divider il prodotto: il reſto è il logaritmo del termine cercato.

Sieno 4 : 8 :: 64 : x. I loro logaritmi ſaranno 2. 3: 6. Si ſommi 3 e 6, e dalla loro ſomma ſi ſottragga 2, $3+6-2=7$; 7 ſarà il logaritmo di x. Al logaritmo 7 corriſponde 128, dunque $x=128$. Infatti 4 : 8 :: 64 : 128.

Se ſi vuol trovar un mezzo proporzionale fra due numeri, come fra 4 e 64, ſi ſommino i loro logaritmi 2 e 6, la metà della loro ſomma $\frac{a+b}{2}=$ è il logaritmo del numero proporzionale.

Al logaritmo 4 corriſponde 16, dunque 16 è il mezzo proporzionale tra 4 e 64.

Per trovar più mezzi proporzionali fra due numeri dati, ſi ſottragga il logaritmo del numero minore dal logaritmo del numero maggiore, e di queſto reſiduo il $\frac{1}{2}$ ſe cercanſi due mezzi proporzionali, il $\frac{1}{4}$ ſe tre il $\frac{1}{5}$ ſe quattro &c. ſi aggiunga al logaritmo del numero minore: il logaritmo di queſta ſomma dà il numero mezzo proporzionale che vien dopo il dato numero minore. Per gli altri mezzi, ſi aggiunga alla ſomma precedente lo ſteſſo $\frac{1}{3}$, o $\frac{1}{4}$, o $\frac{1}{6}$ &c., la ſomma darà gli altri mezzi proporzionali. Come tra 4 e 64 i tre mezzi proporzionali ſono l3, l4, l5, cioè 8, 16, 32.

298. *Elevazione*. Per elevar una quantità ad una potenza qualunque, biſogna aggiunger il di lei logaritmo a ſe ſteſſo tante volte quanto ſi avrebbe dovuto moltiplicar queſta quantità; cioè biſogna moltiplicar il ſuo logaritmo per l'eſponente della potenza.

Volendo, per eſempio, inalzar 2 alla ſua quinta potenza, ſi moltiplichi 1, che è il logaritmo di 2, per 5, e veggaſi l5 a qual numero corriſponde. Egli corriſ-

ſponde a 32; dunque 32 è la 5.ª potenza di 2.

299. *Eſtrazione*. Per eſtrar la radice, ſi divida il ogaritmo d' una quantità data per l' eſponente della adice: il quoziente ſarà l' eſponente di queſta radice.

Volendo eſtrar la radice quadrata di 16, prendaſi il uo 14, e dividaſi per 2; il quoziente 2 ſarà il logaitmo della radice cercata. L2 corriſponde a 4, dunque 4 è la radice quadrata di 16.

Se ſi voleſſe la radice cubica di 64, dividaſi il ſuo 16 per 3, il quoziente 12 dà 4 per radice cubica di 64.

300. Si farebbero dunque con un' eſtrema facilità le operazioni più laborioſe del calcolo, ſe ſi aveſſero i logaritmi d' una gran quantità di numeri. E queſto è quello che ſi è procurato di fare colla coſtruzione delle Tav. de' Logaritmi.

Queſta utile ſcoperta è dovuta al Baron Neper Scozeſe, morto nel 1618. Enrico Briggs, Adriano Ulacq, e molti altri han poi perfezionato queſto lavoro. Le tavole de' Logaritmi, che ora ſon in maggior credito e per l'eſtenſione e per l'eſattezza, ſon quelle di Gardiner *in un Volum. in* 4.°

301. Teoria de' Logaritmi

Sia propoſto di trovar il logaritmo d' un numero qualunque, e di coſtruir una tavola o un canone per i numeri naturali.

1.° Siccome 1, 10, 100, 100, 1000, 10000 &c. coſtituiſcon una progreſſione Geometrica, poſſon dunque i logaritmi eſſer preſi in una progreſſion Aritmetica a volontà. Or per poter eſprimere con frazioni decimali i logaritmi di tutti i numeri intermedj, ſi prenda la progreſſione 0. 0000000, 1. 0000000, 2. 0000000, 3. 0000000, 4. 0000000 &c., in maniera che il primo di queſti numeri, o vero *zero*, ſia il logaritmo di 1, il ſecondo ſia il logaritmo di 10, il terzo di quello di 100, e così degli altri.

2°. E' evidente, che non ſi potran trovare logaritmi eſatti per i numeri, che ſon fuori della predetta ſerie

Geometrica 1, 10, 100 &c. Ma se ne potranno avere de' così vicini, che in pratica saranno sì buoni come se fossero esatti.

Per render ciò sensibile, supponga si che sia domandato il logaritmo del numero 9. Converrà introdurre tra 1.0000000 e 10. 0000000 un mezzo proporziona Aritmetico. Il mezzo proporzionale Geometrico farà 3. 1622777, e l'Aritmetico sarà 0. 5000000: questo sarà evidentemente il logaritmo di quello. Ma quello sorpassa 3 d'un poco più di $\frac{1622777}{100000000}$, per conseguenza sarà molto lontano da 9. Si cerchi dunque tra $3\frac{1622777}{100000000}$ e 10 un altro mezzo proporzionale Geometrico, il quale necessariamente si accosterà a 9 più che il primo: E tra 10 e questo nuovo mezzo proporzionale se ne cerchi ancora un terzo; e così via via, finchè se ne trovino due consecutivi, di cui l' uno sia immediatamente al di sotto di 9; e cercando un mezzo proporzionale tra questi due numeri, e poi ancora un altro tra quello e questo de' due ultimi, che avrà 9 tra lui ed il precedente, si giungerà finalmente ad un mezzo proporzionale che sarà ugual a $9\frac{90000000}{100000000}$, il quale non essendo lontano da 9 che d' una dieci millionesima parte d'unità, il suo logaritmo può, senza alcun errore sensibile, esser preso per il *logaritmo* di 9 stesso.

Si ritorni dunque a tutti questi mezzi proporzionali Geometrici, e prendendo l'un dopo l'altro il *logaritmo* di ciascun di loro per l'introduzione d' altrettanti mezzi proporzionali Aritmetici, si trova finalmente ch. 0.9542425 è il *logaritmo* dell'ultimo mezzo proporzionale Geometrico. Onde si può conchiudere, che questo numero può esser preso, senza error sensibile,

per

· il *logaritmo* di 9 , perchè vi ſi accoſta eſtremante.

3°. Se ſi trovano de' mezzi proporzionali tra 1. 00000 e 3. 1622777, e ſe nello ſteſſo tempo ſi cerl logaritmo di ciaſcuno di loro ; ſi giungerà finalnte ad un *logaritmo* viciniſſimo a quello di 2 : e l degli altri .

4.° Non è pertanto neceſſario prenderſi tanta pena trovar i logaritmi di tutti i numeri ; poichè i nuri che ſon il prodotto di due numeri , han per loitmi la ſomma de' logaritmi de' loro producenti . E procamente , ſe ſi ha il *logaritmo* del prodotto di numeri , e quello di uno de' ſuoi producenti , ſi à facilmente il *logaritmo* dell' altro producente . la ſteſſa maniera , avendo il *logaritmo* d' un quato, d'un cubo &c , ſi ha quello della radice , coſi è dimoſtrato nelle propoſizioni precedenti : onſe ſi prende la metà del *logaritmo* di 9 , ſi avrà ogaritmo di 1, vale a dire 0. 4771212.

02. *Spiegazione delle Tav. Logaritmiche.*

lelle Tav. de' Logaritmi tutti i numeri ſotto la letN ſon i numeri intieri ; gli altri a canto ſon i reſpettivi Logaritmi.

le' Logaritmi i numeri, che ſon a ſiniſtra del punesprimon intieri ; e quelli che ſon a deſtra del punesprimon il numeratore d'una frazione, di' cui il ominatore è l' unità ſeguita da tanti zeri quanto re ſono nel numeratore.

gl' intieri de' Logaritmi ſi dà il nome di *eſponendi caratteriſtiche*, perchè moſtrano, aggiungendo 1. di quanti caratteri deve eſſere il numero, cui ogaritmo corriſponde. Onde *o caratteriſtica* ſignicche il numero corriſpondente deve aver il caratdell' unità , ch'è d'una ſola figura ; perchè aggiunlo 1 alla caratteriſtica *o* , ſi avrà il numero 1 , che ra la quantità delle figure del numero corriſpone al logaritmo. La *caratteriſtica* 1 ſignifica, che umero corriſpondente contienenon ſolo unità, ma

anche decine, ma non però centinaja, contien insomma due figure, e che ha il suo luogo tra 10 e 100. E così degli altri *esponenti* o *caratteristiche*.

Quindi siegue, che tutti que' numeri, i quali (benchè differenti) hanno ugual quantità di caratteri o di figure, come tutti i numeri compresi tra 1 e 10, tutti quelli compresi tra 10 e 100, tra 100 e 1000 &c, devon aver logaritmi colla stessa caratteristica, il solo divario sarà nelle cifre poste a destra del punto.

303. Se si ha una vera frazione decimale con carattere reale dopo il punto, come 0. 256, il suo logaritmo sarà evidentemente negativo; ed inoltre la caratteristica di questo logaritmo negativo mostrerà quanti *o* vi saranno nel numero avanti la sua prima figura reale a sinistra, compresovi il *o* che si stima trovarsi sempre avanti il punto. Onde il logaritmo della frazione decimale 0. 256 è 1. 40824; e quello della frazione decimale 0. 0256. è 2. 40824.

Ciò è una conseguenza della definizione de' Logaritmi: poichè se i numeri intieri 1, 10, 100 &c. hanno per logaritmi 0. 1. 2. &c, le frazioni $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ &c, che forman una progressione Geometrica cogl' intieri 1, 10. 100 &c, devon aver per logaritmi i numeri negativi 1, 2 &c. che forman una progression Aritmetica con i numeri 0, 1, 2 &c.

Ciò posto, si faranno sulle frazioni decimali le stesse operazioni, che per mezzo de' logaritmi si son fatte sopra i numeri intieri.

304. Probl. 1.° *Si trovi un Logaritmo d'un numero maggiore di quelli che sono nelle tavole, ma minore di* 10000000, *come per esempio del numero* 92375.

Sol. Si tolgano le quattro prime figure a sinistra, come 9237, e si prenda nelle tavole il logaritmo corrispondente a questo numero tolto, che è 3. 9655309. Si aumenti la caratteristica 3 di tante unità quante figure son rimaste a destra nel numero proposto: qui non ve n'è rimasta che una, che è 5; dunque la carat-

te-

tteriſtica 3 ſarà accreſciuta d'una unità, e diverrà 9655309. Si ſottragga il logaritmo trovato da quelche lo ſiegue immediatamente nelle tavole, cioè logaritmo.

3. 9655780
3. 9655309

471

ſi faccia indi queſta proporzione, come 10 differenfra i numeri 92380 c 92370 coriſpondenti a queſti logaritmi conſecutivi, è alla differenza trovata de' predetti logaritmi, così 5 reſto del numero poſto è alla differenza logaritmica che ſi cerca.

10 : 471 :: 5 : x = 235

ſommi ora inſieme il logaritmo del numero 92370, cioè

4. 9655309

a differenza logaritmica trovata. 235

Queſta ſomma 4. 9655544

il valore del logaritmo richieſto.

a ragione di queſta operazione è, che le differenſi tre numeri a, b, c, lorchè queſte differenze ſoiccioliſſime, ſon tra loro preſſo a poco come le renze de' loro logaritmi.

: il numero propoſto foſſe una frazione, o un in› unito con una frazione, biſognerebbe prima rie tutto ad una ſola frazione, e cercar ſeparatae il logaritmo del numeratore e quello del denotore collo ſteſſo metodo precedente; indi ſottrarn logaritmo dall'altro, e ſi avrà il logaritmo della one propoſta.

5. Probl. 2.° *Trovar il numero corriſpondente ad ogaritmo maggiore di quelli della tavola, come ogaritmo* 7. 7589982.

l. Sottraggaſi dal logaritmo dato il logaritmo di 10, o o di 100, o di 1000, o di 10000, il primo inſomma

di quella ſpecie, che darà un reſto d' un numero di caratteri tali che ſi trovan nelle tavole.

Per eſempio, il numero 10000 ha per logaritmo 4. 0000000; ſottratto queſto logaritmo dal propoſto ——— 7. 7589982

4. 000000

il reſto è ——— 3. 7589982

Si trovi di queſto reſto conſiderato come logaritmo il numero corriſpondente, che è $5741\frac{11}{100}$ — Si moltiplichi queſto numero per 1000, il prodotto 57411100 ſarà il numero cercato.

Se ſi propoſeſſe di trovar la frazione corriſpondente ad un logaritmo negativo, come a 0. 3679767; converrebbe ſottrarre queſto dato logaritmo dall' ultimo della tavola, che è

4. 0000000

0. 3679767

di queſto reſto ——— 3. 6320233

ſi cerchi nelle tavole il numero corriſpondente che è $4285\frac{71}{100}$. Di queſto numero ſi faccia una frazione, cui ſi dia 10000 per denominatore; diverrà $\frac{428571}{1000000}$, e queſta farà la frazione cercata.

La ragione ſi è, che eſſendo ogni frazione il quoziente del ſuo numeratore per il denominatore, l'unità deve eſſer alla frazione come il denominatore è al numeratore. Ma come l'unità è alla frazione che deve corriſpondere al logaritmo negativo dato, così 10000 è al numero corriſpondente al logaritmo reſtante; dunque ſe ſi prende 10000 per denominatore, ed il numero corriſpondente per numeratore, ſi avrà la frazione richieſta.

Pro-

Proporzione Armonica.

306. La Proporzion *Armonica* o *Muſicale* è una terza ſpecie di proporzione formata dalle due precedenti Geometrica ed Aritmetica in queſta guiſa : *Se tre numeri ſon tali , che il primo ſia al* 3.° , *come la differenza tra il primo e 'l* 2.° *è alla differenza tra il* 2.° *ed il* 3.°, *queſti tre numeri ſon in proporzione armonica.*

Onde 2. 3. 6 ſon in proporzion *armonica* , perchè 2 : 6 : : 1 : 3 .

307. Anche quattro numeri ſon in proporzion *armonica*, ſe il primo è al 4.° , come la differenza tra il 1.° e il 2.° è alla differenza tra il 3.° ed il 4.°

Come 24 . 16 . 12 . 9 ſon in proporzion *armonica* , perchè 24 : 9 : : 8 : 3 , E 6 . 8 . 12 . 18 . ſono nella ſteſſa proporzione , perchè 6 : 18 : : 2 : 6 .

308. Se tre o quattro numeri in proporzion *armonica* , ſon moltiplicati o diviſi per lo ſteſſo numero , i prodotti o i quozienti ſaran in proporzion *armonica*.

Come 6 . 8 . 12 che ſon in proporzion *armonica* , moltiplicati per 2 , i loro prodotti 12 . 16 . 24 ſon in proporzion armonica. E diviſi per 2 , i loro quozienti 3 . 4 . 6 ſon ugualmente nella ſteſſa proporzione.

309. Probl. 1.° *Tra due numeri dati trovar un mezzo proporzional armonico.*

Sol. Sia a . x . b . Sarà (307) a : b : : a — x : x — b ; dunque $ax - ab = ab - bx$, e $ax + bx = 2ab$, e $x = \frac{2ab}{a+b}$.

Onde ſe $a = 12$, $b = 6$, ſarà $x = \frac{2 \times 12 \times 6}{12+6} = 8$.

310. Probl. 2.° *Dati due numeri* a , b , *trovar un terzo proporzional armonico.*

Sol. Sia a . b . x . Sarà (306) a : x : : b — a : x — b ; dunque $ax - ab = bx - ax$, e $2ax - bx = ab$, e $x = \frac{ab}{2a-b}$.

Onde se $a=3$, $b=4$, sarà $x=\frac{12}{6-4}=6$.

311. Probl. 3.° *A tre numeri dati trovar il quarto proporzional armonico.*

Sol. Sia a.b.c.x. Sarà (307) $a:x:b-a:x-c$; dunque $ax-ac=xb-ax$, e $x=\frac{ac}{2a-b}$. Onde se $a=9$, $b=12$, $c=16$, sarà $x=\frac{9\times16}{18-12}=24$.

312. Se si prende un mezzo proporzional Aritmetico tra due numeri dati, ed un mezzo proporzional armonico tra gli stessi due numeri dati, i quattro numeri saranno in proporzione Geometrica. Come tra 2 e 6 il mezzo proporzional Aritmetico è $\frac{2+6}{2}=4$, e l'Armonico $\frac{2\times2\times6}{2\times6}=3$. In fatti $2:3::4:6$.

313. Se si continua la proporzion Armonica in maniera, che la differenza tra il primo ed il 2.° termine sia alla differenza tra il 2.° ed il 3.°, come il primo è al 3.° termine; si formerà una *progressione* o *serie armonica*.

314. In queste tre sorti di proporzioni vi è questa rimarchevol differenza, che una progression Aritmetica cominciando da un numero dato, può esser crescente all'infinito, ma non decrescente: una progression armonica può decrescere, ma non crescer all'infinito: e la progressione Geometrica può ugualmente crescere e decrescer all'infinito.

Progressioni { Aritmetica ∴ 1, 2, 3, 4, 5 &c.
Armonica ∴ 12, 8, 6, 4 $\frac{4}{5}$ &c.
Geometrica ∴ $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4 &c.

315. Dicesi proporzione *Contrarmonica*, lorchè tre numeri son tali, che la differenza tra il primo ed il

2.° e

2.° è alla differenza tra il 2,° ed il 3.° , come il 3.° è al primo.

Come 3 . 5 . 6 ſon in proporzione *contrarmonica* , perchè 2 : 1 : : 6 : 3 .

Onde per trovar un mezzo proporzionale *contrarmonico* tra due numeri dati a e b è faciliſſimo . Poichè ſia a . x . b . Sarà $x - a : b - x :: b : a$; dunque $ax - a^2 = b^2 - bx$, e $ax + bx = a^2 + b^2$; dunque $x = \frac{a^2 + b^2}{a + b}$.

Or ſe $a = 3$, e $b = 6$, ſarà $x = \frac{9 + 36}{3 + 6} = 5$.

CAPITOLO V.

Proprietà della Grandezza conſiderata nell' Infinito.

316. SI chiama grandezza *finita* quella che ha *limiti*; diceſi numero *finito* qualunque numero , di cui ſi può aſſegnar ed eſprimer il valore ; chiamaſi progreſſione *finita* quella che ha un certo numero di termini.

Noi non abbiamo idee diſtinte e dirette che delle grandezze finite . L' *Infinito* non ci è noto che per un'aſtrazione negativa ; cioè per un'operazione , per così dire , *negativa* del noſtro ſpirito , il quale non fa attenzione ai *limiti* della coſa, che noi perciò conſideriamo come *infinita*. La denominazione ſteſsa d' *Infinito* lo pruova : queſta parola ſignifica negazione di *finito* , e dimoſtra che noi da principio concepiamo il *finito* , e che togliendo poſcia o negando i *limiti del finito*, concepiamo l' *Infinito*.

Da queſta analiſi ſi vede : 1.° quanto la nozione dell' *Infinito* è vaga ed imperfetta in noi. Si vede , ch' ella non è propriamente che la nozione dell' *Indefinito*; purchè per la parola *Indefinito* s' intenda *una quantità vaga cui non ſi aſſegnan limiti*.

2.° Si vede ancora, che l' *Infinito*, com' è conſidera-

to

to dall' Analisi, è propriamente il *limite del finito*; vale a dire *è il termine cui il finito tende sempre, senza mai giungervi; ma cui si può supporre ch' egli si avvicini sempre vie più, benchè giammai vi arrivi.*

E' in questo aspetto, che la Geometria e l' Analisi ben intese consideran la quantità *infinita*.

I Matematici dicon e provano, per esempio, che la somma di questa serie di numeri $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ &c. $= 1$.

Cio significa (se si vuol parlar con idee chiare) che il numero 1 è il *limite* della somma di quella serie di numeri; vale a dire che quanto più numeri si prenderanno in quella serie, più la somma di quelli numeri si accosterà ad esser ugual ad 1, *e ch' ella potrà accostarvisi quanto più vicino si vuole*. Quest' ultima condizione è necessaria, per compire l' idea attaccata alla parola *limite:* Perchè il numero 2 (per esempio) non è il limite della somma di questa serie, per la ragione che qualunque numero di termini vi si metta, la somma si accosterà bensì sempre vie più al numero 2, ma non potrà accostarvisi così da vicino quanto si vorrà, poichè la differenza sarà sempre maggiore dell' unità.

Similmente, lorchè si dice, che questa serie $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 2, 4, 8, 10 &c. o qualunque altra crescente è *infinita*, s' intende dire, che quanto più termini di questa serie si prenderanno, tanto più grande ne sarà la somma, e ch' ella può esser ugual ad un numero quanto grande si vorrà.

Tal' è l' idea, che convien formarsi dell' *Infinito* riguardo alle Matematiche. Non appartien dunque ai Matematici esaminare, se in effetto dianfi quantità *infinite* attualmente esistenti, se lo spazio sia realmente *infinito*, se in una porzione finita di materia siavi un numero realmente *infinito* di parti. Tutte queste quistioni sono straniere all' *Infinito Matematico*, il quale non è assolutamente che il limite delle quantità finite; limite di cui non è necessario in Matematica supporre l' esistenza reale, basta solo che il finito non vi pervenga giammai.

Si

Si domanda ſpeſſo, ſe vi ſieno degl' infiniti gli uni più grandi degli altri, ſe il quadrato d'un numero infinito ſia infinitamente più grande di queſto numero. Al Matematico la riſpoſta è facile: per lui un numero *infinito* non è che un' idea aſtratta, che eſprime ſolamente un limite intellettuale, cui ogni numero finito non perviene giammai.

317. Dunque per quantità *infinitamente grandi* o *infinitamente piccole*, i Matematici non intendono quantità reali attualmente eſiſtenti, ma quantità delle quali nel primo caſo poſſon ſempre aſſegnarſene maggiori, e nel ſecondo caſo poſſon ſempre vie più diminuirſi, aſtraendo col penſiero ogni limite determinato.

318. Le quantità o *infinitamente grandi*, o *infinitamente piccole* ſon ſoggette a tutte le operazioni del calcolo come le quantità finite.

Il ſegno dell' infinito è queſto ∞. Onde per rappreſentar una ſerie di numeri creſcente all' infinito $\frac{\cdot}{\cdot}$ o. $1.2.3.4....\infty$.

Parimente una quantità finita può eſſer diviſa in parti ſempre più piccole, finchè ſi giunga ad una parte infinitamente piccola, e ſi avrà una ſerie di numeri decreſcente all infinito; come $\frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}...\frac{1}{\infty}$.

319. *Una quantità divenuta infinita non può più ricever nè accreſcimento nè diminuzione, ſe non ſe per mezzo di altre quantità infinite.*

E' chiaro, che una quantità finita divenuta *infinita*, ha preſo tutti gli accreſcimenti o diminuzioni poſſibili, e perciò ella non può più eſſer nè accreſciuta, nè diminuita da alcuna quantità finita. Ma queſta tal quantità infinita può ricevere da un' altra quantità infinita tutte le alterazioni di aumento, o diminuzione.

Onde $\infty \pm 1 = \infty$, e $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$; ma $\infty \pm \infty = 2\infty$, e $\frac{3}{\infty} \times 3\infty = \frac{3\infty}{\infty} = 3$; $\frac{2}{\infty} : \frac{2}{\infty} = \frac{2}{2}$ &c.

320. *Dunque una quantità finita unita o ſeparata da*

da una quantità infinitamente grande, può traſcurarſi nel calcolo, ed eſſer ſuppoſta = o. Così $\infty + a = \infty$.

Lo ſteſſo è d'una quantità infinitamente piccola rapporto ad una quantita finita. Onde $a + \frac{1}{\infty} = a$.

321. *Vi è un' infinità di ſpecie di grandezze infinite.* Si può concepire queſta progreſſione Aritmetica $\div 1\infty . 2\infty . 3\infty \ldots . \infty\,\infty$, di cui l'ultimo termine $\infty\,\infty$, o ∞^2 è un *infinitamente più grande* del primo infinito. Or $\infty^2 + \infty^2 = 2\infty^2$, e per conſeguenza ſi può concepire queſt'altra progreſſione $\div 1\infty^2 . 2\infty^2 . 3\infty^2 \ldots \infty\,\infty^2$, o ∞^3, di cui l' ultimo termine è infinitamente più grande del primo.

Con un ragionamento conſimile ſi proverà, che $\div 1\infty^3 . 2\infty^3 . 3\infty^3\ 4\infty^3 \ldots \infty\,\infty^3$, o ∞^4. In generale ſi può concepire ∞^∞, ed anche ∞^{∞^∞} all' infinito.

Lo ſteſſo è della grandezza infinitamente piccola. Perchè ſi può concepire $\frac{1}{\infty} . \frac{1}{2\infty} . \frac{1}{3\infty} \ldots . \frac{1}{\infty\,\infty}$, o $\frac{1}{\infty^2}$, di cui l'ultimo termine è infinitamente più piccolo del primo. Similmente $\frac{1}{\infty_2} . \frac{1}{2\infty^2} . \frac{1}{3\infty^2} \ldots$ $\frac{1}{\infty\,\infty^2} = \frac{1}{\infty^3}$; ed in generale ſi può concepire $\frac{1}{\infty^\infty}$, e $\frac{1}{\infty^{\infty^\infty}}$ &c.

322. Gli eſponenti delle quantità infinite ſervon a moſtrar il loro ordine d'infinito. Per eſempio ∞, 3∞ che hanno 1 per eſponente e che equivagliono a ∞^1, $3\infty^1$,

$3\infty^1$, sono grandezze infinitamente grandi del primo ordine, $2\infty^4$, $ab\infty^4$, son quantità infinitamente grandi del 4.° ordine. E $\frac{4}{\infty}$, $\frac{a}{\infty}$, son infinitamente piccole del primo ordine; come $\frac{1}{2\infty^2}$ è un infinitamente piccolo del 2.° ordine &c.

L'espressioni degl' *infinitamente piccoli* son quelle, ove il segno dell'infinito è denominatore della frazione, di cui il numeratore è un finito o un infinito d' un ordine inferiore. Dove poi il segno dell' infinito non è denominatore, son espressioni di quantità *infinitamente grandi*.

Convien però sempre ricordarsi di quel che si è detto (316). Onde per questi infiniti del 2.° e del 3.° ordine, come se si dicesse *che una tal linea divien infinita, e tal altra che ne dipende divien infinita del 2.° ordine*, altro non si deve intendere, e altro non significano tali espressioni, se non che il rapporto della 2.ª linea alla prima (supponendole tutte due finite) è tanto maggiore quanto questa prima è più grande; e che questo rapporto può esser supposto più grande di qualunque numero finito che si vorrà assegnare.

Lo stesso è per le quantità infinitamente piccole, come più diffusamente si spiegherà altrove.

323. *Gli ordini successivi degl' infiniti son in progressione Geometrica.*

Gli esponenti, ch'esprimon questi ordini, son i termini delle serie naturali de' numeri. Come $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \infty^4.\ \infty^3.\ \infty^2.\ \infty^1.\ \infty^0.\ \infty^{-1}\ \infty^{-2}.\infty^{-3}$ &c. sono lo stesso che $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \infty^4.\ \infty^3.\ \infty^2.\ \infty.\ 1.\ \frac{1}{\infty}.\ \frac{1}{\infty_2}.\ \frac{1}{\infty_3}$ &c.

324. *Un infinito d' un ordine qualunque non può esser aumentato nè diminuito per addizione o per sottra-*

trazione da un numero finito d' infiniti d' un ordine inferiore

Vale a dire uno o più infiniti d'un ordine inferiore sono = o riguardo ad un infinito d' un ordine superiore; come $\infty^2 \pm a\infty = \infty^2$; e $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty_2} = \frac{1}{\infty}$.

325. *Un infinito moltiplicato o diviso per un altro infinito, ha per prodotto o per quoziente una grandezza d'un ordine segnato dall' esponente del prodotto o del quoziente.*

Così $\infty \times \infty = \infty^2$; $3\infty \times a\infty = 3a\infty^2$; $\infty^2 \times \infty^1 : 3\infty^4 \times 4\infty^5 = 12\infty^9$. *Dunque il prodotto di due infinitamente grandi, è un infinitamente grande d'un ordine espresso dalla somma degli esponenti.*

$\infty \times a = a\infty$. Dunque *un infinitamente grande moltiplicato per un finito, dà un infinitamente grande dello stesso ordine.*

$\infty \times \frac{1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = 1$. Dunque *il prodotto d' un infinitamente grande per un infinitamente piccolo dello stes' ordine, è finito.*

$\frac{1}{\infty} \times a = \frac{a}{\infty}$; $\frac{1}{4\infty^3} \times 2c = \frac{c}{2\infty^3}$. Dunque *il prodotto d' un infinitamente piccolo per un finito, è un infinitamente piccolo dello stesso genere.*

Nella divisione. $\frac{\infty}{\infty} = 1$; $\frac{\infty}{2\infty} = \frac{1}{2}$. Dunque *il quoziente d' una quantità infinitamente grande divisa per una quantità infinitamente grande dello stes' ordine, è finito.*

$\frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty$. Dunque *il quoziente d'un infinitamente grande diviso per un infinitamente grande d' un ordine*

ordine inferiore, è un infinitamente grande a' un ordine ugual alla differenza degli esponenti.

$\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$. Dunque *il quoziente d' un infinitamente grande diviso per un infinitamente grande d' un ordine superiore, è un infinitamente piccolo d' un ordine ugual alla differenza degli esponenti.*

CAPITOLO VI.

Delle Serie.

326. SI chiama *Serie* un' unione di termini, che presi consecutivamente crescon o decrescono secondo una certa stessa legge: Tali sono le progressioni Aritmetiche e Geometriche.

327. Dicesi *Serie Finita* quella, di cui il numero de' termini è limitato; e *Serie infinita* quella che si suppone continuata all' infinito.

328. Le serie, delle quali i termini vanno crescendo, si chiamano *Divergenti*; e quelle delle quali i termini diminuiscono, chiamansi *Convergenti*.

Una serie tanto più *converge* o *diverge*, quanto più rapidamente ciascun termine cresce o decresce riguardo a quello che lo precede.

329. Si considerano tre principali Serie di numeri. Quelle de' numeri *figurati* o di differenti ordini; quelle de' numeri *poligoni*; e quelle delle *potenze*.

1.° Le serie de' numeri *figurati* comincian così.

Numeri	
	Costanti del primo ordine .. 1. 1. 1. 1. 1. 1 &c.
	Naturali, o del 2.° ordine .. 1. 2. 3. 4. 5. 6 &c.
	Triangolari o del 3.° ordine 1. 3. 6. 10. 15. 21 &c.
	Piramidali o del 4.° ordine .. 1. 4. 10. 20. 35. 56

La legge di ciascuna serie de' numeri figurati è, che ciascuno de' loro termini è la somma de' termini corrispondenti della serie precedente. Onde la seconda serie

rie è formata dall'addizione continua di unità. I termini della 3.ª serie son formati dall' addizione continua di quelli della 2.ª &c.

330. 2.° I numeri *Poligoni* son formati dalla somma de' termini consecutivi d' una progression Aritmetica, che incomincia da 1.

Progression Aritmetica. Numeri Poligoni.
1, 2. 3. 4. 5 &c. Diff.ª 1... 1. 3. 6. 10. 15 &c. Triangolari
1. 3. 5. 7. 9 &c. Diff.ª 2... 1. 4. 9. 16. 25 &c. Quadrati
1. 4. 7. 10. 13 &c. Diff.ª 3... 1. 5. 12. 22. 35 &c. Pentagoni
1, 5. 9, 13. 17 &c. Diff.ª 4... 1. 6. 15. 28. 45 &c. Esagoni

Si chiaman *Poligoni*, perchè rappresentan il numero de' punti necessarj, per riempiere gli spazj de' poligoni regolari, disponendo questi punti in simetria sopra linee tirate parallelamente ai lati di questo poligono.

331. 3.° Le serie delle *potenze* de' numeri son quelle de' quadrati, de' cubi &c. de' termini consecutivi della serie de' numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5 &c.

332. Oltre queste serie di numeri (che si possan generalizzare con espressioni Algebraiche) se ne trovano spesso dell'altre. Per esempio, una frazione decimale, come 0. 3543, non è altra cosa che la serie

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{3}{10000} \ldots$$

Uno stesso numero diviso successivamente per i termini d' una progression Aritmetica, come $\frac{7}{3} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{7}{6}$ &c. forma una serie, che è una *progression armonica*.

Si possan far ancora ad arbitrio quante serie si vogliono composte di molte altre, facendo sopra di loro termine per termine qualcuna delle operazioni Aritmetiche. Come la serie $\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{8}{105} \cdot \frac{16}{945}$ &c. che si è formata col metter per numeratori i termini d' una

d'una progressione Geometrica doppia, e per denominatori i prodotti del primo, de'due primi, de'tre primi, de'quattro primi &c. numeri impari.

Or quando la legge, secondo cui una serie è composta, non si ravvisa subito, bisogna scriverla sotto una forma, che la faccia conoscere.

Nella serie precedente si vede subito, che i numeratori son in progressione Geometrica, ma non si vede come i denominatori sienfi formati. Ma se si mette sotto questa forma $\frac{1}{1}, \frac{2}{1.3}, \frac{4}{1.3.5}, \frac{8}{1.3.5.7}, \frac{16}{1.3.5.7.9}$ &c. se ne riconosce subito la legge. (i puntini son segni di moltiplicazione come X).

333. Si riducon sovente in serie infinite le quantità, che non si possono scomporre senza residuo: come i quozienti de' termini che non sono multipli del divisore, e le radici delle potenze imperfette.

Sia, per esempio, proposto di trovar il quoziente di $\frac{1}{1+x^2}$.

Operando come nel calcolo de' decimali, si troverà $= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$ &c. Perchè facendo $\frac{1}{1} = 1$, e poi $1 \times 1 + x^2 = 1 + x^2$: e togliendolo dal dividendo, si ha $1 - 1 - x^2 = -x^2$. Dunque il primo termine del quoziente è 1, ed il resto è $-x^2$. Dividendo questo resto per 1, si ha il 2.° termine del quoziente che è $-x^2$. Or $-x^2 \times 1 + x^2 = -x^2 - x^4$, e togliendo questo da $-x^2$, resta x^4. Dividendo ancora questo resto per 1, si ha $+x^4$, 3.° termine del quoziente. E così degli altri.

Nella stessa guisa si trova, che $\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \frac{ax^4}{b^5}$ &c. e che $\frac{x^2}{x+b} = \frac{a^2}{x} - \frac{a^2b}{x^2} + \frac{a^2b^2}{x^3}$ &c.

334. Se si propone di ridurre $\sqrt{a^2-x^2}$ in una serie infinita, seguendo le regole delle radici si avrà $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}}$ &c.

Sia per esempio, $a = 5$, $x = 3$, sarà $a^2 - x^2 = 25 - 9$, e $\sqrt{a^2-x^2} = 5 - \frac{9}{10} - \frac{81}{1000} - \frac{729}{100000}$ &c. $= 4$.

335. Quindi si vede, che lorchè si hanno i primi termini d'una serie, che si trova per la scomposizione, bisogna procurar di scoprire la legge del loro cammino, perchè allora si può cessar di operare, e si può continuar la serie osservando questa legge, purchè se ne sia assicurato con un numero sufficiente di termini.

Per esempio, esaminando la serie precedente, che esprime $\sqrt{a^2-x^2}$, si vede facilmente, ch'ella è ugual ad a più tutti i prodotti de' termini di una progressione geometrica (di cui il primo è $\frac{x^2}{a}$, ed il quoziente o la ragion comune è $\frac{x^2}{a^2}$) moltiplicati consecutivamente per $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, -\frac{5}{128}$ &c.

Non si tratta dunque che di trovar la legge di questi coefficienti, la quale è $-\frac{1}{2}, -\frac{1.1}{2.4}, -\frac{1.1.3}{2.4.6}, -\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}$ &c.

I numeratori son i termini della serie naturale de' numeri impari crescenti; ed i denominatori son i termini della serie naturale de' numeri pari crescenti: e questi termini sono moltiplicati per due, tre, quattro &c. insieme successivamente; indi le frazioni, che se ne formano, son ridotte alle espressioni le più semplici.

Som-

Somma delle Serie.

336. Sopra le ſerie ſi poſſon fare tutte le operazioni dell' Aritmetica, ma la più utile e la più difficile è ſommarle, cioè ridurre ad una ſola eſpreſſione finita tutti i termini d'una ſerie data. E' in queſta eſpreſſione che conſiſte la ſoluzione de' problemi, ne' quali entran le ſerie.

337. E' chiaro, che ſe una ſerie infinita è ſempre *divergente*, la di lei ſomma non può eſſer finita.

Ma ſe è *convergente*, la ſomma è ſpeſſo finita. Sia per eſempio $\div\div \frac{d}{b}, \frac{d}{bq}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3} \ldots \frac{d}{bq^\infty}$, queſta è una ſerie divergente, a cauſa che i denominatori van ſempre creſcendo (ſupponendo q maggiore dell' unità) ſcrivendola dunque alla roveſcia $\div\div \frac{d}{bq^\infty} \ldots \frac{d}{bq^4}, \frac{d}{bq^3}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq}, \frac{d}{b}$, ſi renderà creſcente.

Ora applicandovi la formola (273) $s = \frac{lur-p}{r-1}$, in cui $u = \frac{d}{b}$, $p = \frac{d}{bq^\infty}$, $r = q$; ſi avrà $s = \frac{\frac{dq}{b} - \frac{dl}{bq^\infty}}{q-1}$, e traſcurando il termine infinitamente piccolo $\frac{d}{bq^\infty}$, ſarà $s = \frac{\frac{dq}{b}}{q-1} = \frac{dq}{bq-b}$. Queſta ſarà una formola per

ſommare qualunque progreſſione Geometrica decreſcente all'infinito.

338. Sia ora da ſommarſi una ſerie di frazioni, di cui i numeratori ſien in progreſſion Aritmetica, ed i denominatori in progreſſione Geometrica.

Sia per eſempio, $\frac{a}{b}, \frac{a+d}{bq}, \frac{a+2d}{bq^2}, \frac{a+3d}{bq^3}$ &c.

Mettaſi prima queſta ſerie così $\frac{a}{b}, \frac{a}{bq} + \frac{d}{bq}, \frac{a}{bq^2} + \frac{d}{bq^2} + \frac{d}{bq^2}, \frac{a}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3} + \frac{d}{bq^3}$ &c.

Da ciò poſſon dedurſi le ſerie ſeguenti, che ſon tutte progreſſioni Geometriche.

$\therefore \frac{a}{b}, \frac{a}{bq}, \frac{a}{bq^2}, \frac{a}{bq^3}$ &c. la di cui ſomma è $= \frac{aq}{bq-b}$

$\therefore \frac{d}{bq}, \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3}$ &c. la ſomma è $= \frac{d}{bq-b}$

$\therefore \frac{d}{bq^2}, \frac{d}{bq^3}$ &c. la ſomma è $= \frac{d}{bq^2-bq}$

$\therefore \frac{d}{bq^3}$ &c. la ſomma è $= \frac{d}{bq^3-bq^2}$

(Per comprendere, che la ſomma di $\frac{d}{bq^3} =$ $\frac{d}{bq^3-bq^2}$, ſi compiſca la progreſſione, di cui $\frac{d}{bq^3}$ ſia il primo termine; ſi avrà $\frac{d}{bq^3}, \frac{d}{bq^4}, \frac{d}{bq^5} \ldots \frac{d}{bq^\infty}$.

Or

Or la ſomma di queſta ſerie è evidentemente $\frac{dq}{bq^1} - \frac{d}{b-q^\infty} = \frac{dq}{bq^1} = \frac{dq}{bq^2-bq^1} = \frac{d}{bq^1-bq^2}$).

$\frac{\quad}{q-1}$

Or queſte ſomme (eccetto la prima) forman la progreſſione $\frac{d}{bq-b}, \frac{d}{bq^2-bq}, \frac{d}{bq^3-bq^2}$ &c., delle quali la ſomma è $\frac{dq}{bq^2-2bq+b}$. Se dunque vi ſi aggiunge la prima $\frac{aq}{bq-b}$, ſi avrà $\frac{dq}{bq^2-2bq+b} + \frac{aq}{bq-b} = \frac{aq^2-aq+dq}{bq^2-2bq+b}$, che riſulta dal ridurre le due prime frazioni allo ſteſſo denominatore, ed a dividere il numeratore ed il denominatore per $bq-b$. Dunque $\frac{aq^2-aq+dq}{bq^2-2bq+b}$ ſarà la ſomma delle ſomme, vale a dire la ſomma di tutta la ſerie propoſta. Queſta dunque ſi può riguardare *come una formola generale per ſommare tutte le ſerie delle frazioni, delle quali i numeratori ſon in progreſſion Aritmetica, ed i denominatori in progreſſione Geometrica.*

339. Dunque l'arte di ſommar le ſerie in generale, conſiſte a trovar un metodo di ſommarne alcune, che ſi prendon in appreſſo per formole, alle quali convien ridurre (ſe è poſſibile) le ſerie che ſi vuol ſommare. Ovvero conviene ſcomporre queſte ſerie in molte altre riducibili a qualcuna delle formole, ed in conſeguenza ſommabili, e poi aggiunger inſieme le ſomme di ciaſcuna di queſte ſerie parziali.

340. Lorchè non ſi può ſommare in termini finiti

una serie infinita, bisogna procurare di metterla sotto una forma la più convergente che sia possibile; perchè *se una somma converge velocissimamente, basta sommare effettivamente alcuni de' suoi primi termini, e gli altri si possan trascurare senza errore sensibile.*

Per esempio, nella $\sqrt{a^2+x^2}$, quanto più il valore de x sarà piccolo riguardo ad a, tanto più la serie $a + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{26a^5}$ &c. convergerà velocemente, perchè i numeratori divengono piccioliſſimi riguardo ai denominatori.

Si $a = 10$, e $x = 1$. sarà $\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{1600000}$ &c. dove si vede che il 4°. termine è già come infinitamente piccolo, e per conseguenza i tre primi termini bastano per aver presso a poco la radice di 101, la qual è $10\frac{399}{8000}$.

341. Sia proposto trovar delle formole per sommare quanti termini consecutivi si vorrà delle potenze de' termini della serie de' numeri naturali. Per giungervi, convien ragionare così.

Poichè i termini consecutivi de' numeri differiscon sempre di una unità, è chiaro, che se se ne prendon alcuni, come a, b, c, d, e, f, si avrà $f = e + 1$, $e = d + 1$, $d = c + 1$, $c = b + 1$, $b = a + 1$.

Or se s' inalzano questi termini alle loro potenze consecutive, si avrà . . . . .

$f^2 = e^2 + 2e + 1$	$f^3 = e^3 + 3e^2 + 3e + 1$
$e^2 = d^2 + 2d + 1$	$e^3 = d^3 + 3d^2 + 3d + 1$
$d^2 = c^2 + 2c + 1$	$d^3 = c^3 + 3c^2 + 3c + 1$
$c^2 = b^2 + 2b + 1$	$c^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1$
$b^2 = a^2 + 2a + 1$	$b^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ &c.

E se poi si unisce ciascuna di queste potenze in una sola equazione, si avrà .....

$f^2 = +2e+1$	$f^3 = +3e^2+3e+1$
$+2d+1$	$+3d^2+3d+1$
$+2c+1$	$+3c^2+3c+1$
$+2b+1$	$+3b^2+3b+1$
a^2+2a+1	a^3+3a^2+3a+1

342. Quindi si deducono questi Teoremi generali, *lorchè si hanno molti termini consecutivi della serie de' numeri naturali.*

1.° *Il quadrato* f^2 *dell' ultimo di questi termini è ugual al quadrato* a^2 *del primo, più due volte la somma e* $+d+c+b+a$ *de' termini che precedon l'ultimo, più il numero* $1+1+1+1+1$ *degli stessi termini precedenti.*

2.° *Il cubo* f^3 *dell' ultimo di questi è ugual al cubo* a^3 *del primo, più tre volte la somma de' quadrati de' termini precedenti, più tre volte la somma di questi termini, più il loro numero* &c.

343. Da ciò siegue, che chiamandosi p il primo termine, ed u l'ultimo, il numero de' termini precedenti l'ultimo sarà $u-p$. Se dunque si chiama s la somma di tutti questi termini, sarà s^2 la somma di tutti i loro quadrati, s^3 la somma di tutti i loro cubi &c.; e sarà $s-u$ la somma di tutti i termini precedenti l'ultimo, s^2-u^2 la somma di tutti i loro quadrati, s^3-u^3 la somma di tutti i loro cubi.

Dunque il primo Teorema precedente sarà espresso da questa formola $u^2 = p^2+2s-2u+u-p$, e riducendo sarà $u^2 = p^2-p+2s-u$.

Ed il 2.° Teorema sarà $u^3 = p^3-p+3s^2-3u^2+3s-2u$ &c.

Dalla prima formola si tira $s = \frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p$.

E sostituendo questo valore nella 2.a formola, si avrà $u^2 = p^3+3s^2-\frac{3}{2}u^2-\frac{1}{2}u-\frac{3}{2}p^2+\frac{3}{2}p$; e per

conseguenza $s^2 = \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u - \frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{6}p$.

Sostituendo i valori di s^2 e di s nella terza formola, si ha riducendo $u^4 = p^4 + 4s^3 - 2u^3 - u^2 - 2p^3 + p^2$, e per conseguenza $s^3 = \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{4}p^2$. Lo stesso è dell' altre potenze.

344. Benchè le somme di molte serie sien infinite, e per conseguenza inassignabili in termini finiti, son nondimeno di grande uso nella Geometria, sopra tutto lorchè si può conoscer il loro rapporto esatto.

Si trova, per esempio, che *la somma de' quadrati d' un' infinità di termini consecutivi della serie de' numeri naturali è il* $\frac{1}{3}$ *del prodotto dell' ultimo quadrato moltiplicato per il loro numero*.

Poichè essendo a lora l' ultimo termine della serie de' numeri naturali ∞, sostituendo ∞ ad u nella formola della somma de quadrati, si avrà $s^2 = \frac{1}{3}\infty^3 + \frac{1}{2}\infty^2 - \frac{1}{6}\infty - \frac{1}{3}p^3 + \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{6}p$, che si riduce a $s^2 = \frac{1}{3}\infty^3$, a causa che tutti gli altri termini son infinitamente piccoli riguardo a $\frac{1}{3}\infty^3$. Or il prodotto dell' ultimo quadrato ∞^2 per il numero de' termini, che è ∞, è ∞^3, dunque la somma de' quadrati è il terzo di questo prodotto.

345. Con un simil calcolo si trova, che *la somma d' un' infinità di cubi consecutivi è il* $\frac{1}{4}$ *del prodotto dell' ultimo cubo per il loro numero*. Perchè $s^3 = \frac{1}{4}\infty^4$.

In generale la somma delle potenze finite m d' un' infinità di termini consecutivi della serie de' numeri naturali, è $\frac{1}{m+1}$ del prodotto della potenza ∞^m dell' ultimo termine moltiplicata per il loro numero ∞; ovvero $s = \frac{1}{m+1}\infty^{m+1} = \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$.

Questo può applicarsi anche alle somme delle stesse radi-

radici de' termini consecutivi della serie de' numeri naturali. Perchè se si tratta, per esempio, delle radici quadrate, allora $m = \frac{1}{2}$, e $m + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$;

$$\frac{1}{m+1} = \frac{2}{3}$$

Dunque $\frac{1}{m+1} \propto m+1$ diverrà $\frac{2}{3} \propto \frac{3}{2}$; il che significa che la somma delle radici quadrate d' un' infinità di termini della serie de' numeri naturali, è i due terzi del prodotto della radice quadrata dell' ultimo termine moltiplicata per il loro numero. Perchè $\frac{2}{3} \propto \frac{3}{2}$ è lo stesso che $\frac{2}{3} \propto \frac{1}{2} \times \propto$.

CAPITOLO VII.

Della Combinazione.

346. NON dovrebbe dirsi propriamente *Combinazione* che l'unione di molte cose prese a due a due; ma nelle Matematiche si applica a tutte le maniere possibili di prender un numero di quantità date.

347. Una sola quantità non ammette alcuna *combinazione*. Due quantità *a* e *b* danno una *combinazione*. Tre quantità *a*, *b*, *c*, combinate due a due, danno tre *combinazioni ab*, *ac*, *bc*. Quattro ne daran sei, *ab*, *ac*, *bc*, *ad*, *bd*, *cd*. Cinque ne daran dieci *ab*, *ac*, *bc*, *ad*, *bd*, *cd*, *ae*, *be*, *ce*, *de*.

In generale, *la serie de' numeri delle combinazioni delle quantità prese due a due*, è 1, 3, 6, 10 &c. *vale a dire la serie de' numeri triangulari* (330). Onde se *q* è il numero della quantità da combinarsi a due a due, $\frac{q-1 \times q+0}{1 \times 2}$ sarà il numero delle loro combinazioni a due a due.

348.

348. Se si hanno tre quantità *a*, *b*, *c* da combinarsi a tre a tre, non faranno che una sola combinazione *abc*. Se saran quattro *a*, *b*, *c*, *d*, da combinarsi a tre a tre, saran le quattro combinazioni *abc*, *abd*, *bcd*, *acd*. Se saran cinque, si avran le dieci combinazioni *abc*, *abd*, *bcd*, *acd*, *abe*, *bde*, *bce*, *ace*, *ade*, *cde*: Se saran sei, si avran venti combinazioni.

Onde *la serie delle Combinazioni a tre a tre sarà quella de' numeri piramidali* 1, 4, 10, 20 &c. (329)

Dunque se *q* esprime il numero delle quantità date, $\frac{q-2}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-0}{3}$ sarà il numero delle loro combinazioni a tre a tre.

Il numero delle combinazioni a quattro a quattro delle stesse quantità, si troverà nella stessa maniera essere $\frac{q-3}{1} \times \frac{q-2}{2} \times \frac{q-1}{3} \times \frac{q-0}{4}$.

349. In generale, se *n* esprime il numero delle lettere, che si vuol far entrar in ciascun termine della combinazione, la quantità $\frac{q-n+1}{1} \times \frac{q-n+2}{2} \times \frac{q-n+3}{3} \times \frac{q-n+4}{4} \times \ldots \frac{q}{n}$ esprimerà il numero richiesto delle combinazioni. Vale a dire, bisogna continuar la serie, finchè per una continua addizione dell'unità, divenga $n=o$.

Se si domanda, per esempio, in quante maniere sei quantità possan prendersi a quattro a quattro, si farà $q=6$, $n=4$, e si sostituiranno questi numeri alla formola

mola precedente, la quale diverrà $\frac{6-4+1}{1} \times \frac{6-4+2}{2} \times \frac{6-4+3}{3} \times \frac{6-4+4}{4} = 15$.

Onde nel giuoco del Lotto, ch'è composto di 90 numeri, vi sono 4005 ambi, 117480 terni, 2555190 quaterne, e cinquine 43949268. E pure vi son de' matti che vi giuocano.

350. Se si volesse avere tutte le combinazioni possibili d'un numero qualunque di lettere, prese sì a due a due, che a tre a tre, come a quattro a quattro &c. bisognerebbe giunger insieme tutte le formole precedenti $\frac{q-1}{1} \times \frac{q-0}{2}$;

$$\frac{q-2}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-0}{3};\ \frac{q-3}{1} \times \frac{q-2}{2} \times \frac{q-1}{3} \times \frac{q-0}{4} \text{ \&c.}$$

Vale a dire, il numero di tutte queste combinazioni sarà espresso da $\frac{q \times q-1}{1.2} + \frac{q \times q-1 \times q-2}{2.3} + q \times \frac{q-1}{1} \times \frac{q-2}{2} \times \frac{q-3}{3}$ &c.

351. Se ora si paragona questa serie con quella che presenta l'elevazione d'un binomio qualunque alla potenza q, si vedrà che facendo ugual all'unità ciascun de' termini di questo binomio, le due serie son le stesse, eccettuato i due primi termini 1 e q che mancan alla serie precedente. Onde invece di questa serie,

si

si potrà scrivere $2-1-q$, il che dà una maniera ben semplice per aver tutte le combinazioni possibili d'un numero q di lettere. Sia per esempio $q=5$, il numero totale delle sue combinazioni sarà $2^5-5-1=32-6=26$.

Alternazione o Permutazione.

352. L' *Alternazione* è una differente specie di Combinazione, ch' esprime il cambiamento d' ordine che si può dar a molte quantità, collocandole successivamente le une appresso dell' altre, o l' altre dopo le une.

Due lettere *ab* non hanno che due *alternazioni* *ab*, *ba*.

Se si prende una terza lettera *c*, è evidente che questa terza lettera può esser disposta in tre maniere diverse in ciascuna delle due *alternazioni* precedenti; cioè o alla testa, o in mezzo, o alla fine. Dunque per tre lettere vi saranno due volte tre *alternazioni*, o sei.

Se si prende una quarta lettera, ella potrà occupare quattro luoghi differenti in ciascuna delle sei *alternazioni* delle tre lettere precedenti, il che fa sei volte quattro, o 24. Nella stessa maniera cinque lettere faranno 24×5, o 120 alternazioni: E così dell'altre.

Onde in generale, per trovar tutte le *alternazioni* possibili d'un numero dato di quantità, devonsi prender tutti i numeri dall' 1 fin al numero dato, e moltiplicarli successivamente gli uni per gli altri, $1\times2\times3\times4\times5$ &c. il prodotto totale sarà il numero delle *alternazioni* richiesto.

Per aver un'idea dell'effetto sorprendente delle alternazioni, veggasi quante se ne possan fare colle 32 carte del giuoco del Picchetto.

Eccone il gran numero: 263, 130, 836, 933, 693, 530, 167, 218, 012, 160, 000, 000. A

Or si supponga, che sulla superficie della terra sienvi due mila milioni di uomini, che divisi a coppie giuochi-

uochino tutto il giorno a Picchetto : si avranno mille milioni di coppie di giuocatori, ovvero 1. 000. 000. 000.

Suppongasi che ciascuna coppia di questi giuocatori faccia 400. colpi al giorno : ne farà per anno 146, 000, per secolo ne farà 14. 600. 000, e per un milione di secoli farà colpi 14. 600. 000. 000. 000.

Dunque tutte le mille milioni di coppie di giuocatori faranno in un milione di secoli colpi = 14. 160. 000. 000. 000. 000. 000. 000. B.

Se dunque si divide il primo numero A per questo numero B, il quoziente indicherà quanti milioni di secoli ci vorranno, affinchè tanto numero di giuocatori facciano tutte le *permutazioni* possibili, supponendo che niuna mai siasi ripetuta.

Or siccome il numero A ha 36 cifre, e B 23, il quoziente ne avrà 36 — 23 + 1 = 14, di cui i due primi saran 18. Questo quoziente dunque sarà 18 milioni di milioni di secoli.

333. *Dato un numero qualunque di quantità, trovar il numero delle combinazioni ed alternazioni, che le dette quantità possan ricevere, prendendole in tutte le maniere possibili.*

Sol. Supponendo da principio che non vi sieno che due quantità *a* o *b*, si avranno 2 alternazioni *ab*, *ba*. E siccome ciascuna di queste quantità può anche combinarsi con se stessa, si avrà ancora *aa* e *bb* ; vale a dire che il numero delle combinazioni ed alternazioni è in questo caso 2 + 2 = 4.

Se vi sono tre quantità *a*, *b*, *c*, e che l'esponente della loro variazione sia 2, si avran 3 termini per le loro *combinazini*, le quali saranno *ab*, *bc*, *ac* ; a questi 3 termini se ne aggiungeranno ancora 3 altri *ba*, *cb*, *ca* per le *alternazioni* ; e finalmente 3 altri per le *combinazioni aa*, *bb*, *cc* : il che darà 3 + 3 + 3 = 9.

In generale se il numero delle quantità è *n*, e l'esponente della variazione è *m*, n^m sarà quello di tutte le loro *combinazioni* ed *alternazioni* possibili.

Se si vuol dunque avere tutte le *combinazioni* ed

alter-

alternazioni d'un numero *n* di lettere in tutte le varietà possibili, bisognerà prender la somma della serie $n^n + n^{n-1} + n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4}$ &c. finchè l'ultimo termine sia *n*.

Or siccome tutti i termini di questa serie son in progressione Geometrica, e si ha il primo termine nn, il secondo n^{n-1}, e l'ultimo *n*, la somma di questa progressione (273) sarà

$$\frac{n^{n+1} - 1}{n - 1}$$

Se per esempio, $n = 4$, il numero di tutte le *combinazioni* ed *alternazioni* possibili sarà $= \frac{4^5 - 1}{4 - 1} =$

$\frac{1020}{3} = 340$.

Se $n = 24$, tutte le *combinazioni* ed *alternazioni* possibili saranno

$$\frac{24^{25} - 24}{24 - 1} = 32009658644406818986777955348272600$$

$$\frac{}{23} =$$

139172428888725299942512849340200. Questo è l'enorme numero ch' esprime tutte le combinazioni di tutte le lettere dell' Alfabeto fra loro.

Questa teoria non serve per gl'inutili Anagrammi, ma per la scienza delle probabilità, per i giuochi d' azzardo, per le scommesse, per la certezza, e per l'importantissima Aritmetica Politica.

LIBRO III.

DELLA GEOMETRIA ELEMENTARE.

4. NELLO ſtudio che noi facciamo della natura o per neceſſità o per piacere, oſſerviamo che i corpi hanno un gran numero di oprietà, colore, figura, eſtenſione &c. ma talmente ite per lo più nel medeſimo ſoggetto, che affin di idiarle ciaſcuna più a fondo, ſiam obbligati a conſirarle ſeparatamente. Facendo a poco a poco collo irito la ſeparazione e l'aſtrazione di queſte differenproprietà, giungiamo finalmente a conſiderar i cor, come ſe non foſsero che ſemplicemente eſteſi, firati, diviſibili, penetrabili. Or il corpo così conſierato, cioè come una porzione d'eſtenſione termina da per tutto, è il *Corpo Geometrico*, vale a dire oggetto della *Geometria*.

355. Noi conſideriamo da principio e generalmente ueſto *Corpo* colle ſue tre dimenſioni, lunghezza, arghezza e profondità. Ma indi per determinare più acilmente le proprietà, conſideriamo prima una ſola limenſione; cioè la lunghezza; poi due dimenſioni, cioè la ſuperficie; finalmente le tre dimenſioni inſieme, cioè la ſolidità. E' appunto così che ſi penſa alla lunghezza d' una ſtrada, ſenza far attenzione alla ſua larghezza: ſi concepiſce la ſuperficie d' un campo, ſenza penſar alla profondità delle terre che lo compongono, quantunque ſappiamo che non vi ſia corpo ſenza le tre dimenſioni, ſiccome non vi è corpo ſenza molte proprietà e qualità ſenſibili.

356. Una dimenſione conſiderata ſola, ſi chiama *Linea*. Due dimenſioni congiunte inſieme, fanno una *Superficie*. E tutte tre compongon inſieme il *Corpo* o il *Solido*.

Quindi le proprietà delle *Linee*, delle *Superficie*, e de'

e de' *Solidi* fan l'oggetto e la divisione naturale della *Geometria*. La *Geometria* dunque *è una Scienza che dimostra le proprietà delle quantità continue, o sia dell' estensione*.

CAPITOLO I.

Delle Linee, o della Longimetria.

357. I Geometri soglion concepire la linea formata dal movimento d'un *punto*.

Se il punto non muta direzione, la linea descritta da questo moto dicesi *Retta*; se poi il *punto* cambia nel suo moto continuamente direzione, la linea si chiama *Curva*.

Altri definiscon la linea retta *la più breve che può trarsi tra due punti*.

Ma l'idea, che ciascun ha della linea *retta* e della *curva*, è così semplice e chiara, che non si può ben definire.

358. E' per altro evidente, 1.° che la linea retta è la più corta che possa tirarsi fra due termini, e che per conseguenza ella è la misura precisa della loro distanza.

2°. Che non vi è che una sola specie di linea retta, ma di curve ve n'è un'infinità.

3.° Che la posizione di due punti basta per determinare quella d' una linea retta; ma che ce ne voglion più di due per determinare la posizione d' una curva.

Proprietà delle Linee Rette nella posizione d' una retta riguardo ad un' altra.

359. Concepiscasi una retta immobile AB (che si potrà chiamare la fissa) posta sopra un Piano immobile (fig.ª 1); suppongasi un' altra retta mobile AB ugual alla prima, e talmente distesavi sopra, che non faccia con essa prima che una stessa linea retta. Concepi-

piſcaſi in mezzo a queſta retta un punto E, ſu cui
i la mobile AB; in guiſa che la ſua parte EA aven-
deſcritto ſullo ſteſſo Piano la traccia AOBR, ven-
a poſarſi eſattamente ſulla parte EB della fiſſa;
entre che la parte EB della mobile avendo deſcritta
traccia BVZA vien a poſarſi eſattamente ſulla par-
fiſſa EA.

Ciò poſto, la mobile avrà deſcritta una figura, alle
i parti ſi ſon dati più nomi, ch' è neceſſario ſa-
re.

360. *Definizioni* I. Tutta la figura deſcritta dalla
obile, ſi chiama un *Circolo*. La curva ARBVA che
termina, diceſi la *Circonferenza del Circolo*, e il
nto E intorno a cui la circonferenza è deſcritta, ſi
iama il *Centro*.

361. II. Le parti determinate qualunque d'una cir-
onferenza, come AN, ANO, ORT &c. diconſi *Ar-
bi* di circoli.

362. III. La linea EA, la quale col ſuo movimen-
o ſul centro E deſcrive il circolo, ſi chiama il *Rag-
io* del circolo. Generalmente diconſi *Raggi* tutte le
ette tirate dal centro d'un circolo alla ſua circonfe-
enza, come EO, ER, EX &c.

363. Corollario. Quindi *tutti i raggi d' uno ſteſſo
ircolo o di due circoli uguali, ſon uguali tra loro*.
Onde ſi può definir il circolo, *una figura terminata
da una curva, di cui tutti i punti ſon ugualmente
lontani da un punto in dentro*, detto *Centro*.

364. IV. La retta AB, che divide il circolo in due
parti uguali paſſando pel ſuo centro, ſi chiama il *Dia-
metro* del circolo. E *Diametri* generalmente diconſi
tutte le rette, le quali paſſando pel centro termi-
nano da una parte e l'altra nella circonferenza, co-
me OV, PX, RZ &c.

365. La circonferenza di ciaſcun circolo ſi divide in
360 parti uguali dette *gradi*; (80) ciaſchedun grado
ſi ſuddivide in 60 parti uguali dette *minuti*, e cia-
ſchedun minuto in 60 *ſecondi*, ciaſcun ſecondo in 60

terzi &c. Queſte parti non ſono grandezze aſſolute, come ſon le miſure de' peſi, piedi &c. ma ſon grandezze proporzionate alla grandezza del circolo; in maniera che un grado di un gran circolo è maggiore d' un grado d' un piccolo circolo.

366. Si eſamini ora quel che accade pel movimento della mobile. E' chiaro, I. che prima che la mobile aveſſe incominciato a muoverſi, ella non tagliava la fiſſa, nè l' era inclinata; ma tutti i ſuoi punti coprivan eſattamente tutti i punti corriſpondenti della fiſſa.

367. II. Che la mobile non può girare ſopra uno de' ſuoi punti, per eſempio, E, ſenza che tutti gli altri punti non ſi muovano nello ſteſſo tempo, e non faccia ciaſcuno ugual numero di paſſi.

368. III. Subito che la mobile incomincia a muoverſi, tutti i ſuoi punti ſi allontanano da una parte e l' altra da' punti corriſpondenti della fiſſa tanto più, quanto più lontani ſi trovano dal punto E, che reſta comune alle due linee; per conſeguenza la mobile taglia la fiſſa nel punto E, e le parti di queſta mobile divengon inclinate a quelle della fiſſa. Per eſempio, quando nel ſuo movimento la mobile è divenuta NET, non l' è rimaſto altro di comune colla fiſſa, che il punto E; il punto N ſi è ſcoſtato dal punto A molto più di qualunque altro punto compreſo tra N ed E, come *n* dal ſuo corriſpondente *a* nella fiſſa, benchè queſto punto *n* abbia fatto tanti paſſi per venire da *a* in *n*, quanti il punto N ne ha fatti per venire da A in N. Lo ſteſſo è del punto T riguardo a B. La linea NET ha dunque tagliata la fiſſa in E, e le ſue parti NE, ET ſon divenute inclinate ſulla fiſſa. Onde l' idea d' *inclinazione di due rette* rinchiude quella della lor interſezione attuale o poſſibile col prolungarle.

369. Una retta che è inclinata ad un' altra, e che la taglia, o termina ad incontrarla, fa con eſſa un *angolo* al punto dell' incontro; così le parti NE, AE fanno in E l' angolo NEA.

370. Un angolo eſprime la quantità dell' allontanamen-

nto di una retta rapporto un' altra ch' ella incor-
; onde quanto più queſte rette ſono diſcoſti; tanto
ggior è l' angolo, ch' eſſe fanno.

371. E' chiaro che la miſura dell' allontanamento di
: rette è il numero de' paſſi uguali, che ciaſcun
nto della mobile ha fatti per allontanarſi dal punto
riſpondente della fiſſa; perchè ſe il punto A della
bile ha fatto una volta più paſſi per venire da A
P, che per venire da A in N, è manifeſto ch' eſ-
ndo in P, ſi è allontanato del doppio di quel ch'
a eſſendo in N, e per conſeguenza l'angolo AEP è
ppio dell' angolo AEN. E' anche evidente che il
nto *a* della mobile ha fatto tanti paſſi per venir in
, poi in *p*, quanti ne ha fatti il punto A per venir
N, poi in P; onde il punto *a* ha fatto una volta
ù paſſi per venir in *p* che per venir in *n*, la linea
P ſi è slontanata dalla fiſſa AE una volta più che la
nea EN. Donde ſiegue:

372. Teorema I. Che *la miſura d' ogni angolo rettilineo è l' arco d' un circolo qualunque che ha il centro alla ſommità dell' angolo, e che ſi trova compreſo fra due rette, che forman l' angolo*. Onde lorchè
dice che un angolo è di 20 gradi, ſignifica che ha
er miſura un arco di circolo di 20 gradi.

373. Teor. II. Che *tutti gli angoli aventi per miſura archi di ugual numero di gradi, ſon uguali fra loro*; e reciprocamente che *tutti gli archi deſcritti in un medeſimo angolo o in angoli uguali, avendo il loro centro alla ſommità dell' angolo. ſono d' uno ſteſſo numero di gradi.*

374. Teor. III. Ch' *eſſendo nota la grandezza d' un angolo, ſi conoſce la grandezza d' un arco che può eſſer intercetto fra ſuoi lati*; e reciprocamente, che *nota la quantità de' gradi d' un arco, ſi ſa la grandezza dell' angolo, il qual ha il vertice nel centro dell' arco, e co' ſuoi lati abbraccia l' arco ſteſſo.*

375. Eſſendo l' angolo una mera *inclinazione* ed apertura di linee, non può dirſi propriamente eſtenſione o quantità, perchè una mera apertura di linee non

ha parti, e perciò l'angolo non è (rigorosamente parlando) una quantità.

I Geometri per questa ragione han presa la misura dell' angolo dall' arco del circolo. Quando dunque si dice, che un angolo è doppio d' un altro, ciò significa solamente, che l'arco descritto dalla sommità dell' uno è doppio dell' arco descritto dalla sommità dell' altro.

376. Or se si considera con attenzione il movimento circolare della mobile sopra la fissa, si vedrà ch'ella passa per tutte le posizioni possibili riguardo a quella, con cui ella fa ancora tutti gli angoli possibili.

Tutti questi angoli si chiaman *acuti*, come AEN, AEO &c. finchè la mobile inclina più dal lato AE, donde è partita, che dal lato della parte fissa opposta EB.

377. Questi angoli diconsi retti, come AEP, PEB, quando la mobile divenuta PE, non inclina più verso AE che verso EB.

378. Una retta che fa un angolo retto con un'altra, le è *perpendicolare*. Così PE è perpendicolare ad AE o ad EB, o anche a tutta la retta AB; reciprocamente EA, EB, o AB, sono perpendicolari ad EP.

379. Gli angoli diconsi *ottusi*, come AEQ, AER &c. quando la mobile è divenuta più inclinata verso la parte fissa EB, che verso la parte fissa AE donde ella è partita.

Tutto ciò si può applicar alla mobile EB, che descrive il semicircolo BVZA.

380. Teor. IV. *Tutti gli angoli acuti son più piccoli de' retti e degli ottusi, e tutti gli angoli retti son minori degli ottusi.*

381. Teor. V. *Vi è un' infinita specie d' angoli acuti e di ottusi, ma l' angolo retto è unico nella sua specie.*

382. Teor. VI. *Gli angoli retti son tutti uguali fra loro*; perchè son formati da rette, le quali nel lor incontro non inclinano più da una parte che dall' altra.

383.

3. Coroll. I. *La misura di due angoli retti è una circonferenza di circolo*; e per conseguenza, *la d' un angolo retto è un arco di 90. gradi.*

4. Coroll. II. *Un angolo acuto ha per misura un minore di 90°, ed un angolo ottuso ha per misura un arco maggiore di 90°* (380).

5. Teor. VII. *Per un punto dato in una retta può passare che una sola perpendicolare a quella retta in un medesimo piano*; perchè non può esser che un caso, in cui la mobile non sia inclinata verso la parte fissa EA, che verso la parte fissa EB.

386. Teor. VIII. *Tutta la circonferenza d' un circolo non può misurare che quattr' angoli retti*; poichè tutta la circonferenza APBXA è occupata da quattr' angoli retti AEP, PEB, BEX, XEA; o pure perchè 4 × 90° = 360 gradi.

387. Coroll. Dunque *la somma di tutti gli angoli possibili formati in un medesimo punto* E, *non può eccedere 360.° o il valore di quattr' angoli retti.*

388. Teorem. IX. *Una retta qualunque*, come OE *cadendo sopra un' altra* AB *fa con lei due angoli* AEO, OEB, *de' quali la somma equivale sempre* 180°, *alla misura di due angoli retti*; poichè i due archi ANO, ORB, che li misurano, formano la semicirconferenza AORB.

389. Coroll. *Tutte le rette*, FE, NE, OE &c. *che terminano nello stesso punto* E *d' una retta* AB, *vi fanno degli angoli, de' quali la somma è* 180°.

390. Chiamasi *angolo di supplemento* quello che unito ad un altro, fa con esso 180°. Tal è OEB riguardo ad OEA, o OEA riguardo ad OEB. *Angolo di complemento* è quello che unito con un altro, fa con esso un angolo retto o di 90 gradi; tal è PEO riguardo ad OEA.

391. Teor. X. *De' quattr' angoli* AEO, OEB, BEV, VEA, *formati dall' intersezione di due rette*, AB, OV, *i due che son opposti alla sommità, son uguali*; onde OEB = VEA, AEO = BEV.

Dimoſtraz. La parte EA della mobile AB non può far un paſſo per accoſtarſi verſo O, ſe l' altra parte EB non ne fa uno per andar verſo V. Dunque EA fa tanti paſſi per divenir EO, quanti EB per divenire EV: dunque l' arco AO è di tanti gradi, di quanti è l' arco BV. Dunque l' angolo AEO = BEV. Nella ſteſſa maniera ſi dimoſtra che l' angolo OEB = VEA.

Coroll. *Se ſi conoſce uno de' quattr' angoli formati dall' interſezione di due rette, ſi conoſcon anche tutti gli altri.*

Proprietà delle Linee rette nella poſizione di una riguardo a due, o a più altre, ſenza racchiudere ſpazio.

392. Concepiſcaſi prima una retta CD, (fig.ª 2.) talmente poſta riguardo alla fiſſa AB, che ne ſia da per tutto ugualmente diſtante, come ſe la retta AB aveſſe talmente ſcorſo da AB in CD, che la ſua parte IC non aveſſe mai inclinato più verſo AE, che ID verſo EB; in queſto caſo la retta CD è detta *parallela* ad AB, ed è chiaro che queſte due rette non poſſon giammai tagliarſi per quanto ſi prolunghino, ed in conſeguenza non han alcuna inclinazione l' una verſo l'altra. Facciaſi poi girare (come ſi è fatto avanti) la mobile AB ſopra il punto di mezzo E, ſi vedrà evidentemente.....

393. I. Che la mobile non potrà giammai incontrar la retta CD, finchè rimarrà ſteſa ſulla fiſſa AB; perchè l' una e l' altra non fanno allora che una ſola e ſteſſa linea retta parallela a CD.

394. II. Che ſubito che la mobile AB avrà fatto il minimo movimento ſul punto E, ella potrà incontrar e tagliare CD, ſe ſi ſuppongono prolungate a ſufficienza; perchè allora una parte de' punti che compongono la mobile AB, ſi ſarà tanto più avvicinata verſo la retta CD, e l'altra parte ſe ne ſarà tanto più allontanata, quanto più queſti punti ſi ſon allontanati dal punto E (368).

395.

395. III. Che la mobile passando per tutti i gradi possibili d' inclinazione riguardo alla fissa, acquisterà ancora tutti gli stessi gradi d'inclinazione riguardo alla parallela CD, in guisa ch'ella farà sempre con questa parallela gli stessi angoli che colla fissa.

Poichè suppongasi la mobile restata nella posizione NT, e confusa con AB, venga indi a collocarsi in CD scorrendo parallelamente ad AB, vale a dire non prendendo alcuna inclinazione rapporto ad AB; è chiaro che NT ed AB essendo restate fisse, la retta CD non ha potuto acquistare altra inclinazione rapporto a NT, che quella che avea nella posizione AB; onde l' angolo CGN che misura la sua inclinazione rapporto a NT, è ugual all' angolo AEN, il quale misura l' inclinazione di AB rapporto a NT. Per la stessa ragione gli angoli TEB, EGD son uguali, e AET, CGE, NGD, NEB son anche uguali fra loro; e gli angoli acuti son i supplementi degli angoli ottusi (§88), e reciprocamente gli angoli ottusi sono supplementi degli acuti.

L'angolo TEB si chiama *alterno esterno* riguardo all' angolo CGN, come anche l' angolo TEA riguardo all'angolo NGD. E l' angolo AEG dicesi *alterno interno* riguardo all'angolo EGD, come GEB riguardo a EGC.

Lo stesso si dimostrerà di tutte le rette NT, OV &c. rapporto ad AB ed a CD.

396. Teor. I. *Una linea qualunque* EG, *che taglia due parallele* AB, CD, *fa con loro gli angoli alterni interni uguali, gli angoli alterni esterni uguali, due angoli interni* BEG, EGD *supplementi l'uno dell' altro, e due angoli esterni* TEB, DGN *anche supplementi l'uno dell' altro, cioè uguali a due retti:* e reciprocamente, *sempre che due rette* BE, DG *cadendo sopra una retta* TN, *fanno gli angoli alterni interni uguali, o gli angoli alterni esterni uguali, o due angoli interni* BEG, EGD *supplementi l' uno dell' altro, o due angoli esterni* TEB, DGN, *anche supplementi l' uno dell' altro, queste due rette,* BE, DG

ſon parallele. Perchè ciò non può mai accadere, ſempre che queſte due linee BE, DG non abbian alcuna inclinazione l'una riguardo all'altra.

397. Oſſervaz. Quel che quì ſi dice di due rette parallele, deve intenderſi di quante rette ſi voglia, lorchè ſaran tutte parallele fra loro. Perchè le proprietà della prima parallela riguardo alla ſeconda, ſon le ſteſſe che quelle della ſeconda riguardo alla terza, e quelle della terza ſon le ſteſſe riguardo alla quarta, e così dell'altre.

398. IV. Se la mobile continua a girare, è chiaro che i punti F, G, H, della ſua interſezione con CD, ſaran tanto più vicini al punto E, quanto più la mobile ſi approſſimerà a divenir perpendicolare alla fiſſa AE; in maniera che quand'ella lo ſarà divenuta, il punto I della ſua interſezione con CD ſarà vicino al punto E il più ch'è poſſibile; indi continuando la mobile andare verſo EB, i punti d'interſezione K, L, M diverranno tanto più lontani da E, quanto più la mobile inclinerà verſo EB.

399. V. Dunque quando la mobile penderà tanto verſo la fiſſa BE, eſſendo divenuta ER, quanto pendeva verſo AE lorchè era EN; o ciò ch'è lo ſteſſo, quando gli angoli AEN, BER, o NEP, REP ſaranno uguali, i punti d'interſezione G, L, ſaranno in ugual diſtanza dal punto E e dal punto I, vale a dire, ſarà GI = IL, GE = LE.

Per convincerſene, convien concepire tutta queſta Figura 2 piegata ſulla perpendicolare EP; perchè allora è chiaro, che AE ſarà ſteſa eſattamente ſopra EB, IC ſopra ID, l'arco AN ſopra l'arco uguale BR, e l'arco NP ſopra il ſuo uguale PR; dunque il raggio NE ſarà eſattamente ſteſo ſul raggio ER, e il punto G ſul punto L; onde GE = LE, e GI = IL.

400. Queſto è il famoſo principio della *Soprapoſizione* sì utile alla Geometria. Da queſto principio naſce queſto aſſioma, *Son uguali tutte quelle figure che ſoprapoſte l'una all'altra, perfettamente coincidono*.

Non

Non vale però l'inversa, come han creduto alcuni, e particolarmente il Clavio.

Questo principio di *soprapposizione* non è, come alcuni pensano, un principio meccanico, consistente ad applicar grossolanamente una figura sopra un'altra, per dedurne la lor uguaglianza, come un artefice applica il suo piede sopra una lunghezza per misurarla. Ma questo principio consiste ad immaginarsi una figura trasportata sopra un'altra, ed a conoscerne

1.° *Dall' uguaglianza supposta delle parti date, la coincidenza di queste parti.* 2.° *Da questa coincidenza la coincidenza del resto, e per conseguenza l' uguaglianza totale e la similitudine perfetta delle due figure.*

Per *soprapposizione* non s' intende solamente l'applicazione di una figura sull'altra, ma quella d'una parte d'una figura sopra un'altra parte della stessa figura, affin di paragonarle fra loro.

Questo principio è chiaro, semplice, ricavato dalla vera natura della cosa, e fa una rigorosa dimostrazione.

Il principio della *soprapposizione*, e quello della *Misura degli Angoli presa da un arco descritto dalla loro sommità*, son i due soli Assiomi necessarj alla Geometria, fertilissimi di tutte le sue proposizioni, e dimostrazioni. Gli Assiomi che soglionsi ordinariamente premetter alle Geometrie, son puerili e sterili. E che bisogno vi è degli Assiomi che il tutto è maggior della parte, per vedere che la metà della linea è più piccola della linea intiera?

401. Teor. II. *Ogni perpendicolare*, come EI, *tirata da un punto* E *sopra una retta qualunque* CD, *è la linea la più corta che si possa tirare da questo punto a questa retta*. E reciprocamente, *se un retta* EI *è la più corta che si possa tirare da un punto* E *ad un' altra retta* CD, *le è perpendicolare*; se ella le fosse inclinata, vi si potrebbe tirar una perpendicolare che sarebbe più corta.

402.

402. Coroll. Dunque una perpendicolare è la vera misura della distanza da un punto ad una linea.

403. Teor. III. *Da un punto* E *preso fuori d' una retta* CD, *non si può tirare che una sola perpendicolare* EI *sopra questa retta*; perchè non vi è che un sol punto che sia il più vicino al punto E; nè vi è che un sol caso in cui una retta tirata da un punto sopra un' altra retta, non le sia inclinata più da una parte che dall' altra.

404. Teor. IV. *Una retta*, come EI, *è perpendicolare ad un' altra* CD, *quando due de' suoi punti*, per esempio, E, I, *son ciascuno ugualmente lontani da due punti* G, L, *qualunque presi in quell' altra linea*; vale a dire, se EG = EL, e se IG = IL. Perchè allora è certo che in questi due punti E, I, la retta EI non pende più verso G che verso L; e siccome due punti bastano per determinare la posizione d' una retta (358), perciò tutta la retta EI non pende più verso G che verso L.

405. Teor. V. *Se due punti* G, L, *d' una retta son ugualmente lontani da un punto* I *della stessa retta, ove ella è tagliata da una perpendicolare* EI, *tutti i punti di questa perpendicolare son ugualmente lontani da questi due stessi punti* G, L. Perchè se vi fosse qualche punto in questa perpendicolare che non fosse in ugual distanza dai punti G, L; in questo punto la perpendicolare inclinerebbe più dal lato ove la distanza sarebbe minore, e per conseguenza non sarebbe perpendicolare.

Compresè queste proprietà, sarà facile risolver i problemi seguenti.

406. Probl. I. *Da un punto* C, (figura 3.) *dato fuori d' una retta data* AB, *tirar una parallela a questa linea.*

Soluzione. Mettasi la punta del Compasso in C, e descritto coll'altra punta, aperta ad arbitrio, un arco qualunque EK, si pianti la punta in E, e descrivasi colla stessa apertura l'arco CF, dal punto dato C fin

al

al rincontro di AB. Prendasi col compasso la grandezza dell'arco CF, e si porti sull' arco EK da E fin a qualche punto come I, e per il punto dato C, e per il punto trovato I, si tiri la retta CID, la quale sarà parallela ad AB.

Dimostraz. Se si tira CE, si conoscerà che a causa degli archi uguali EI, CF, gli angoli CEF, ECI son uguali (373); dunque EC è una retta che taglia le rette AB, CD in maniera che gli angoli alterni interni son uguali; dunque (396) le rette CD, AB son parallele.

407. Probl. II. *Da un punto* I *dato sopra una retta* CD *alzarvi una perpendicolare* (figura 4.).

Soluz. Prendansi ad arbitrio sopra CD due punti H, K ugualmente lontani da I; e da' punti H, K come centri descrivansi colla stessa apertura di compasso due archi di circolo OER, AEB, che s'intersecano in un punto E, per cui si tiri EI; questa sarà perpendicolare a CD.

Dim. Tirati i raggi HE, KE, è chiaro che son uguali a motivo della stessa apertura di compasso; di più, HI = IK per la costruzione, dunque EI è una retta, di cui due punti E, I son ugualmente lontani ciascuno dai due altri punti H, K della retta CD; dunque (404) EI è perpendicolare a CD.

408. Probl. III. *Da un punto dato* E *fuori d' una retta* CD, *menarvi una perpendicolare* EG (figura 5).

Soluz. Fissata la punta del compasso sul punto dato E, si segnino coll' altra due punti H, K sulla retta CD, che sieno ugualmente distanti da E; indi dai punti H, K come centri descrivansi colla stessa apertura qualunque di compasso gli archi OGR, AGB, che si taglian in un punto G, per cui e per il punto dato, si ritiri EG; questa sarà la perpendicolare.

Dimos. Tirati i raggi HG, KG si vedrà come di sopra (407) che i punti G, E son ugualmente lontani dai punti H, K della data retta CD, e per conseguenza GE le è perpendicolare.

409.

409. Probl. IV. *Divider una data retta* HK *in due parti uguali* HI, IK (figura 6.).

Soluz. Dalle due estremità H, K come centri, descrivansi da una parte e l' altra colla stessa apertura di compasso quattr' archi, che si taglian ai punti G, E, per i quali si tiri EG, che dividerà HK in due ugualmente.

Dim. Essendo i punti E, G ugualmente lontani dall' estremità della retta data HK, tutti i punti di questa retta EG saran ugualmente lontani da queste stesse estremità (405), onde anche il punto I ne sarà ugualmente lontano.

Di alcune proprietà delle Linee Rette riguardo al Circolo.

410. Una retta FM (figura 2, o 7) terminata dalla circonferenza d' un circolo, si chiama *Corda, o sottesa*; onde si dice l' Arco FPM ha per corda, o è *sotteso* dalla corda FM. La corda IK (figura 7.) sottende l' arco IPK.

411. Una porzione di circolo racchiusa tra un arco e la sua corda, come FPONF, dicesi *segmento* di circolo; ed una porzione PEO o AEF rinchiusa tra un arco e due raggi, si chiama *settore* di circolo.

412. Teor. I. *Una perpendicolare* EP *tirata dal centro* E *d' un circolo sopra una corda* FM, *la divide in due ugualmente*.

Dim. Poichè la linea EP viene dal centro del circolo, ella ha un punto E, ch' è ugualmente lontano dalle estremità F, M della corda; e poichè è inoltre perpendicolar alla corda, tutti gli altri punti sono (405) ugualmente lontani da queste stesse estremità F, M. Dunque il punto I n'è ugualmente lontano, dunque FI = IM.

413. Teor. II. Reciprocamente, *ogni retta* EP, *che passando pel centro* E *d' un circolo, taglia in due ugualmente una corda* FM, *è perpendicolar a questa corda*.

Dim.

Dim. Poichè EP taglia la corda in due ugualmente, ella ha un punto I ugualmente distante dalle sue estremità F, M; e poichè ella passa per il centro E, ella ha ancora un punto E ugualmente lontano da queste estremità F, M. Dunque EP è una retta, che ha due punti I, E ugualmente lontani dai punti F, M della corda FM; dunque (404) EP è perpendicolare a FM.

414. Teor. III. Similmente, *se una retta* EP *perpendicolare ad una corda* FM *la taglia in due ugualmente, ella passa pel centro del circolo.*

Dim. Se ella taglia la corda in due ugualmente, ella ha un punto I, ugualmente distante dalle estremità F, M; e se ella è perpendicolare, anche tutti gli altri suoi punti son ugualmente distanti dalle estremità F, M (405). Or il centro E è un punto ugualmente distante dalle estremità F, M (363); dunque il centro E è un de' punti, per ove passa la perpendicolare.

415. Se si fa girar la corda FM nel suo circolo, in maniera che le sue estremità F, M sieno sempre nella circonferenza, è chiaro, 1.° che questa corda sottenderà sempre un arco uguale. 2.° Ch'ella sarà sempre ugualmente lontana dal centro. Perchè in questo movimento si può concepire, che la figura FEM giri tutta intiera sul punto E, seguendo i raggi EF, EM sempre la corda. Perciò l'angolo FEM resterà sempre lo stesso, e per conseguenza la sua misura sarà sempre un arco ugual all' arco FPM. Si vede anche che la linea EI rimarrà sempre la stessa in questo movimento. Dunque . . . . .

416. Teor. IV. *In uno stesso circolo*, o *in circoli uguali, le corde uguali sottendono archi uguali; le corde inuguali sottendon archi inuguali; e nello stesso tempo le corde uguali son in ugual distanza dal centro, e le inuguali ne son inugualmente lontane.* Perchè una corda che giri nel suo circolo, si stenderà sempre esattamente sulle corde che le saranno uguali, nè potrà mai spianare su corde che non le saranno uguali.

417. Teor. V. *In uno stesso semicircolo, o in semicircoli*

circoli uguali, gli archi ſon più grandi o più piccoli, ſecondo che le corde ſon grandi o piccole, o che ſon più vicine o lontane dal centro; e reciprocamente, *le corde ſon più grandi o più piccole, più vicine o più lontane dal centro, a miſura che gli archi, ch' elle ſottendono, ſon più grandi o più piccoli.*

418. Teor. VI. *Una retta* EP (figura 2.) *che partendo dal centro* E, *taglia in due ugualmente la corda* FM, *taglia anche ugualmente in due l'arco* FPM *ſotteſo da queſta corda, e per conſeguenza l'angolo* FEM *miſurato da queſt' arco.*

Dim. Poichè allora queſta retta è perpendicolare alla corda FM (413) ed a tutti i ſuoi punti ugualmente lontani dalle ſue eſtremità F, M: Dunque il punto P è anche ugualmente lontano da F, e da M. Dunque ſe ſi tirano PM, FP, ſaran queſte due corde uguali; e per conſeguenza (416) l'arco PRM = PNF. Dunque l'arco FPM, e l'angolo FEM ſon diviſi in due parti uguali dal raggio EP.

419. Teor. VII. *Una corda* FM *parallela a un diametro* AB, *intercetta da una parte e l'altra tra lei e queſto diametro archi uguali*, AF, BM.

Dimoſtr. Se pel centro E ſi tiri ad AB la perpendicolare EP, queſta ſarà anche perpendicolar alla corda FM, e per conſeguenza (412) gli archi ANP = PRB, FNP = MRP; dunque ſe dagli archi uguali ANP, BRP ſi levino gli archi uguali FNP, MRP, reſteranno gli archi uguali AF, BM.

420. Corol. I. *Due parallele* CD, GH) figura 7, e 8) *che traverſan un circolo, intercettan fra loro da una parte e l'altra archi uguali* FI, KM. Perchè tirando pel centro E il diametro AB parallelo a queſte rette, ſi ha AF = BM, AI = KB. Dunque (figura 7.) AI − AF = KB − BM, o FI = KM, e (figura 8.) AI + AF = KB + BM, o FI = KM.

421. Coroll. II. *Se ſi ſuppone che la retta* GH (figura 7.) *ſi allontani dal centro* E *ſcorrendo parallelamente a ſe ſteſſa o alla retta* CD, *finchè giunta nella poſizione* gh, *non faccia altro che toccare la circonfe-*

conferenza in P, *o non entri che infinitamente poco nel circolo; è chiaro, che si deve ancora avere* PM = PF. Poichè i punti I, K, dove la retta GH taglia il circolo, si approssiman a misura che GH si allontana dal centro E, e si confondon al punto P, ove questa retta non fa più che toccar la circonferenza.

422. Una retta che non fa che toccar il circolo senza entrarvi, in qualunque maniera si prolunghi, si chiama *Tangente*; e il punto, ov' ella tocca il circolo, dicesi *punto del contatto*.

423. Teor. VIII. *Un raggio* EP *tirato al punto del contatto* P, *è perpendicolar alla tangente* gh.

Dimostr. Poichè la tangente *gh* non fa che toccare la circonferenza al punto P senza entrarvi, il raggio EP misura la più piccola distanza dal centro E a questa tangente. Dunque (401) le è perpendicolare.

424. Coroll. *Una retta non può toccare che un sol punto della circonferenza d' un circolo*. Poichè dal centro E non si può (403) abbassare che una sola perpendicolare sopra gh.

425. Teor. IX. Reciprocamente, *una retta qualunque* gh *perpendicolar all' estremità* P *d' un raggio* EP *tocca il circolo in questo solo punto* P.

Dimostr. Poichè EP è perpendicolare a *gh*, questo raggio misura la più corta distanza dal centro E alla retta *gh*; dunque tutti i punti di questa retta son più lontani dal centro E che il punto P: dunque tutti questi punti son fuori del circolo, eccetto il sol punto P.

426. Coroll. I. *E' facile tirar una tangente in un punto dato* P *sulla circonferenza d' un circolo*, facendovi passar una retta EN tirata dal centro, e tirando dal punto P (407) la retta *gh* perpendicolare a EN.

427. Coroll. II. *Non si può dunque tirare che una sola tangente ad un punto dato sulla circonferenza d' un circolo* (385); o ch' è lo stesso, *se si tira una retta pel punto del contatto, bisogna o ch' ella sia confusa colla tangente, o ch' entri nel circolo*:

Onde

Onde ella non può passare tra la tangente e la circonferenza.

428. Osserv. Ma vi può passar un'infinità di curve; poichè l'estremità di E può esser l'estremità d'infiniti raggi CE (fig. 31.) FE, BE, DE.

Or poichè tra la tangente e 'l circolo non può tirarsi alcuna linea retta, siegue che l'angolo formato dall'arco del circolo e dalla tangente è minore di qualunque angolo rettilineo: frattanto tal angolo è diminuibile all'infinito, perchè tra la tangente e un arco posson passar infiniti altri archi.

Ha sembrato questo un paradosso, ed ha eccitato tra i Geometri una strepitosa quistione, *se l'angolo del contatto sia paragonabile all'angolo rettilineo*. Quistione di puro nome, come soglion essere tutte le quistioni Matematiche. Tutto quì dipende dall'idea che si attacca alla parola Angolo.

Se per Angolo s'intende una porzione di spazio compreso tra la curva e la sua tangente, è chiaro che questo spazio è paragonabile ad una porzione finita di quello ch'è racchiuso tra due linee rette che si tagliano.

Ma se per Angolo s'intende l'inclinazione di due linee rette, è evidente che questa nozione non può convenir all'angolo del contatto, il qual è formato da una curva e da una retta. Convien dunque dar a quest'angolo una definizione particolare, e questa definizione (ch'è arbitraria) fissata una volta, cessa ogni quistione. Una prova che tal quistione sia di puro nome, si è, che tutti i Geometri son in tutto il resto d'accordo circa le proprietà ch'eglino dimostrano riguardo all'angolo di contingenza.

429. Teor. X. L'*Angolo* BAD (figura 9.) *formato al punto del contatto* A *tra una tangente* Bb *e una corda* AD, *è misurato dalla metà dell'arco* AFD *sotteso dalla corda* AD.

Dimostraz. Si tiri pel centro C il diametro EG parallelo alla corda AD, il diametro Ff perpendicolare a questa corda, e il raggio CA al punto del contatto.

L'an-

L'angolo BAC è retto (423), come lo è anche l'angolo FCG: dunque tutti due hanno l'arco FG per misura. L'angolo BAD per esser retto, ha bisogno dell'angolo DAC, o del suo uguale ACG (396). Or l'angolo ACG ha per misura l'arco AG, dunque l'arco FA sarà la misura dell'angolo BAD. Ma l'arco FA è la metà dell'arco AFD (418); dunque l'angolo BAD è misurato dalla metà dell'arco AD.

Rileggendo la stessa dimostrazione, e mettendo *b*, *f* in luogo di B, F, si conchiuderà che $\frac{1}{2}$ AfD è la stessa misura dell'angolo bAD.

430. Teor. XI. *L'angolo* (figura 10.) *formato alla circonferenza d'un circolo, è misurato dalla metà dell'arco* CD *intercetto tra i suoi lati* AC, AD.

Dimostraz. Per la sommità A dell'angolo si tiri (426) una tangente EB, e la somma de' tre angoli BAC + CAD + DAE = 180° (389) = $\frac{1}{2}$ AC + $\frac{1}{2}$ CD + $\frac{1}{2}$ DA. Or (429) l'angolo BAC è misurato da $\frac{1}{2}$ AC, e l'angolo EAD da $\frac{1}{2}$ AD; dunque l'angolo CAD è misurato da $\frac{1}{2}$ CD.

431. Coroll. I. *L'angolo* DFC *al centro d'un circolo è doppio dell'angolo* DAC *alla circonferenza, e appoggiato sullo stesso arco.*

432. Coroll. II. *Un angolo retto posto nella circonferenza d'un circolo comprende co' suoi lati un semicircolo, ed è appoggiato sopra un diametro. Un angolo acuto comprende meno d'un diametro, ed è appoggiato per conseguenza sopra una corda. Ed un angolo ottuso comprende più d'un semi-circolo, ed è anche appoggiato sopra una corda.*

433. Coroll. III. *Tutti gli angoli che mai si vorranno*, FNM, FPM, FRM &c. (fig. 8.) *descritti in uno stesso segmento, ed appoggiati alla stessa corda* FM, *son fra loro uguali.*

434. Teor. XII. *L'angolo* BAD (fig. 11. e 12.) *formato al di dentro o al di fuori del circolo, ha per misura* $\frac{1}{2}$ BD $\mp$ $\frac{1}{2}$ CE; il segno + è per l'angolo *al di dentro* (fig. 11), il segno — è per l'angolo al di fuori (fig. 12).

Dimostr. Per A si tiri AD parallela alla corda EF, l'angolo BEF = BAD. Or la misura dell'angolo BEF è $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ DF, e (420) DF = CE. Dunque $\frac{1}{2}$ BF = $\frac{1}{2}$ BD + $\frac{1}{2}$ CE.

435. Coroll. *L'angolo* bAD (fig. 12) *tra una tangente* Ab *e una retta* AD *che traversa il circolo, ha per misura* $\frac{1}{2}$ Db — $\frac{1}{2}$ bC. Perchè facendo girare AB sul punto A, finchè divenga tangente in *b*, i punti E, B si confonderanno in *b*. Per la stessa ragione l'angolo dAb compreso tralle due tangenti Ad, Ab ha per misura $\frac{1}{2}$ dFb — $\frac{1}{2}$ dCb.

436. *Osserv.* Quindi un angolo, la cui sommità si situi ove si voglia, sarà determinato, se i suoi lati (prolungati se è necessario) taglino o tocchino una circonferenza di circolo in punti determinati.

437. Teor. XIII. *Se quattro corde formano un quadrilatero iscritto in un circolo, il prodotto delle due diagonali di questo quadrilatero è ugual alla somma de' due prodotti di ciascun lato per il lato opposto.*

Dimostr. Facciasi con BC (fig. 38.) l'angolo BCF = DCA, o, ch'è lo stesso, facciasi con CA l'angolo ACF = DCB; allora a causa degli angoli uguali ABC, CDA (433), i triangoli DAC, BCF son simili, dunque DC: AD :: BC: BF = $\frac{AD \times EC}{DC}$ (264). Similmente a causa degli angoli ACF = BCD, e CDB = CAB, i triangoli DBC, AFC son simili; dunque DC: AC :: BD: AF = $\frac{BD \times AC}{DC}$.

Unendo queste due equazioni, si ha BF + AF, ovvero AB = $\frac{AD \times BC + BD \times AC}{DC}$, e per conseguenza DC × AB = AD × BC + BD × AC.

438. Probl. I. *Divider un arco dato in due archi uguali.*

Soluz. S' immagini una corda tirata per l'estremità

tà dell' arco, e si tagli in due ugualmente per una perpendicolare (409), anche l' arco sarà tagliato in due parti uguali (418).

439. Probl. II. *Divider un angolo dato in due parti uguali.*

Soluz. Centro il vertice dell' angolo descrivasi un arco qualunque tra i due lati dell' angolo; dividasi quest' arco (438) in due parti uguali, e pel vertice dell'angolo si tiri una retta nel mezzo dell' arco; questa dividerà l' angolo dato ugualmente in due.

440. Osserv. Quindi ogni arco e ogni angolo dato può dividersi in 2, 4, 8, 16, 32 &c. parti uguali che son i termini d' una progressione geometrica doppia. Ma non si può divider geometricamente colla regola e col compasso un arco o un angolo qualunque in tre parti uguali. Questo è il famoso problema della *Trisezione dell' Angolo* tanto cercato dagli Antichi. Con più forte ragione non può dividersi un arco in 5, 6, 7, 9 &c. parti uguali per mezzo della Geometria Elementare.

441. Probl. III. *Far passar una circonferenza del circolo per tre punti.*

Soluz. E' evidente che questo problema sarebbe impossibile, se i tre punti fossero in linea retta. Si tirino o s' immaginino due rette che congiungano i tre punti dati: saran queste due corde del circolo cercato.

Si divida ciascuna in due parti uguali (408) per mezzo di due perpendicolari che passeranno (414) pel centro del circolo, il quale per conseguenza sarà nella lor intersezione.

442. Probl. IV. *Trovar il centro d' un circolo, d' un arco dato.*

Soluz. Si tirino due corde qualunque in questo circolo, o arco; e si cerchi (441) il centro.

443. Probl. V. *Continuar un arco di circolo dato in un circolo intiero.*

Soluz. Si cerchi (442) il centro di quest' arco.

Proprietà delle Linee Rette, che racchiudono uno ſpazio.

444. *Definizioni*. Le rette che per loro incontro racchiudono uno ſpazio, compongon una figura rettilinea. Or l'incontro di più rette non può farſi che con angoli, perciò una figura rettilinea ſi chiama *Poligono*.

445. Un Poligono in generale ſignifica uno ſpazio rinchiuſo tra più rette, che ſi dicon *lati*, e che unendoſi gli uni agli altri per ciaſcuna eſtremità, forman in conſeguenza *tanti angoli quanti lati*.

446. Finalmente ſi concepiſce, che ci voglion almeno tre linee rette per rinchiuder uno ſpazio; perciò il primo e il più ſemplice de' Poligoni è il *Triangolo*; il ſecondo è il *Quadrilatero* o *Tetragono*, vale a dire una figura di 4 angoli e di 4 lati; il terzo è il *Pentagono*, cioè una figura di 5 angoli e di 5 lati; il quarto è l'*Eſagono* di 6, indi l'*Ettagono* di 7, l'*Ottagono* di 8, l'*Enneagono* di 9, il *Decagono* di 10, l'*Endecagono* di 11, il *Dodecagono* di 12. &c. l'Ecatagono di 100, il Chilogono di 1000, il Miriogono di 10000.

Siccome tutte queſte figure ſi riferiſcon al Triangolo, è ben neceſſario incominciar da queſto.

De' Triangoli.

Delle differenti ſpecie e proprietà de' Triangoli.

447. Il Triangolo prende differenti nomi ſecondo i differenti rapporti de' ſuoi lati, e de' ſuoi angoli.

Rapporto ai ſuoi lati. Un Triangolo, di cui i tre lati ſon uguali tra loro, come ABC (fig. 14) ſi chiama *Equilatero*.

Quello, di cui due lati AC, AB (fig. 15) ſon uguali, diceſi *Iſoſcele*.

E quel-

E quello, di cui i tre lati ſon ineguali, come ABC (fig. 16) ſi chiama *Scaleno*.

448. Rapporto a ſuoi angoli. Un triangolo, di cui i tre angoli ſon acuti, come ABC (fig. 14) diceſi *Acutangolo*. Quello che ha un angolo retto A (fig. 15) *rettangolo*; e quello che ha un angolo ottuſo C (fig. 16.) *ottuſangolo*.

449. In un triangolo rettangolo ABC (fig. 15.) il lato BC oppoſto all'angolo retto, ſi chiama l' *Ipotenuſa*.

450. In un triangolo qualunque il lato oppoſto a un angolo, ſi chiama la *baſe* di queſt'angolo.

451. Teor. I. *Ogni Triangolo può iſcriverſi in un circolo*, vale a dire, *ſi può far paſſar un circolo per i tre angoli d' un triangolo qualunque*; perchè è lo ſteſſo che far paſſar un circolo per i tre punti dati (441).

452. Teor. II. *La ſomma de' tre angoli di un triangolo qualunque è di 180 gradi, o equivale a due angoli retti.*

Dimoſtr. Avendo iſcritto un triangolo qualunque in un circolo, i tre lati ne ſono le tre corde; e ciaſcun angolo ha per miſura (430) la metà dell' arco ſotteſo dal lato oppoſto; la ſomma de' tre angoli è dunque uguale alla metà della ſomma de' tre archi, vale a dire alla metà della circonferenza del circolo, o a 180.°

453. Coroll. I. *Un triangolo non può avere che un ſol angolo retto, o un ſol ottuſo, e allora gli altri due ſon neceſſariamente acuti.*

454. Coroll. II. *In un triangolo rettangolo uno degli angoli acuti è complemento dell' altro.*

455. Coroll. III. *Se ſi conoſcono due angoli d' un triangolo qualunque, ſe ne può conoſcer il terzo.* Perchè egli è ugual alla differenza tra 180.° e la ſomma de' due angoli noti. *E ſe non ſe ne conoſce che uno, il ſuo ſupplemento è ugual alla ſomma degli altri due.*

456. Teor. III. *In un triangolo qualunque* ABC

(fig. 14) *se si prolunga un lato qualunque* BC , *l' angolo esterno* ABI *è ugual alla somma de' due angoli interni opposti* ACB, CAB.

Dimostr. La somma dell' angolo esterno ABI e dell' interno contiguo ABC è di 180.° (383) ; ma (452) la somma de' due angoli ACB , CAB , e dell' angolo ABC è anche di 180.° Dunque l' angolo esterno ABI è ugual alla somma de' due interni opposti ACB , CAB.

457. Teor IV. *Se da un punto qualunque* D *preso al di dentro d'un triangolo* CAB (fig. 15.) *si tirano due rette* DA , DB *sull' estremità d'un lato qualunque* AB; *l'angolo* ADB *compreso da queste rette , è maggiore dell' angolo* BCA *opposto a questo lato* AB.

Dimostr. Iscritto il triangolo ABC in un circolo, la misura dell' angolo ACB è la metà dell' arco sotteso dalla corda BA (430), laddove la misura dell' angolo BDA è questa stessa metà , più la metà dell'arco intercetto dal prolungamento de' lati BD , AD (434).

458. Teor. V. *In un triangolo qualunque la somma di due lati qualunque è più grande del terzo lato.*

Dimostr. La retta AB (fig. 16) è la più corta per andare da A in B . Dunque se si andasse da A in B passando per C, non si anderebbe pel cammino più corto , e si descriverebbero allora i due lati AC , CB ; dunque la somma de' due lati AC, CB è maggiore del terzo AB.

459. Teor. VI. *In qualunque triangolo il più gran lato è opposto al più grand'angolo, e il più piccolo lato al più piccol angolo.* Reciprocamente &c.

Poichè iscritto il triangolo in un circolo , il più grand' angolo è misurato dal più grand' arco , il più grand' arco (417) è sotteso dalla più gran corda ; e reciprocamente.

460. Coroll. *Se si suppone che l' angolo d'un triangolo si apra sempre più , mentre i due lati che formano quest' angolo , restano della stessa grandezza , il terzo lato opposto all' angolo che cresce , crescerà anche*

che vie più. E reciprocamente, *diminuirà*, *lorchè l' angolo opposto diminuirà*.

461. Teor. VII. *Una perpendicolare tirata a un angolo di qualunque triangolo sulla base, cade al di dentro del triangolo, se i due altri angoli son acuti; e al di fuori, o sul prolungamento di questa base, se uno de due angoli è ottuso*.

Dimostr. 1.° Se nel triangolo GEK (fig. 2.) gli angoli KGE, EKG son acuti, la perpendicolare EI cade tra K e G. Perchè se ella cadesse al di là, per esempio, si supponesse che EL fosse questa perpendicolare, allora il triangolo EKL avrebbe un angolo retto ELK e un angolo ottuso EKL (poichè il supplemento d'un angolo acuto è un angolo ottuso), il che è impossibile (453). Dunque la perpendicolare tirata dall' angolo GEK non può cader altrove che tra G e K.

2.° Se uno degli angoli del triangolo FEH è ottuso, la perpendicolare tirata dall' angolo FEH sul lato opposto FH non può cadere che verso I, sul prolungamento di questo lato. Perchè se si supponesse che EG fosse questa perpendicolare, allora nel triangolo EGH si avrebbe un angolo retto HGE, e un angolo ottuso EHG, il che è impossibile. Dunque ella non può cadere che dal lato del supplemento dell' angolo ottuso, cioè verso I.

462. Teor. VIII. *In un triangolo equilatero tutti gli angoli son uguali fra loro, e ciascuno di* 60°; e reciprocamente *se i tre angoli d' un triangolo son uguali fra loro, o se due son ciascuno di* 60°, *il triangolo è equilatero*. Poichè iscritto il triangolo in un circolo, i tre lati uguali sono tre corde uguali, che sottendon in conseguenza tre archi uguali, i quali misurano tre angoli uguali, de' quali ciascun è il terzo di 180 geadi, &c.

463. Teor. IX. *In un triangolo isoscele, gli angoli opposti ai lati uguali son uguali*; e reciprocamente, *se due angoli d' un triangolo son uguali, il triangolo è isoscele*.

Perchè iſcritto il triangolo in un circolo, gli angoli uguali intercettano archi uguali, e gli archi uguali ſono ſotteſi da corde uguali (416).

464. Coroll. *Se dall'angolo* E (fig. 2) *formato dai lati uguali* EG, EL *del triangolo iſoſcele* EGL, *ſi abbaſſa al lato oppoſto* GL *una perpendicolare* EI, *ella dividerà queſto lato in due parti uguali* GI, IL; a cauſa delle inclinazioni uguali de' due lati uguali GE, LE (399).

465. Teor. X. *Ogni triangolo è circoſcrittibile al circolo*

Dimoſtr. Se dividonſi in due ugualmente due angoli qualunque d'un triangolo, per eſempio, gli angoli B e A del triangolo ABC (fig. 15) le due rette BD, AD che li divideranno, s' incontreranno in un punto D. Or ſe da queſto punto ſi abbaſſano ſopra i tre lati le perpendicolari DG, DF, DE, elle ſaranno uguali fra loro, e per conſeguenza potranno eſſer i raggi d' uno ſteſſo circolo, il quale toccherà i tre lati ai punti G, F, E (425).

Perchè i triangoli rettangoli GBD, BDE ſon uguali, a cauſa dell'angolo in B ugual in ciaſcuno, e del lato comune BD. Dunque GD = DE. Per la ſteſſa ragione i triangoli rettangoli uguali DEA, DFA danno DE = DF. Dunque GD = DE = DF.

466. Coroll. *Le tre rette che dividon in due ugualmente i tre angoli d' un triangolo vanno ad incontrarſi in uno ſteſſo punto nel triangolo.* Poichè è chiaro che ſe ſi divideſſe l'angolo C in due ugualmente per una retta, ella incontrerebbe il punto D.

Della comparazione de' Triangoli.

467. I Triangoli e tutte l'altre figure ſi paragonan in due maniere; o conſiderando la poſizione de' lati, e la grandezza degli angoli e delle figure; o conſiderando gli ſpazj che vi ſon contenuti. Queſta ſeconda maniera appartien all'articolo delle ſuperficie; perciò quì non ſi parlerà che della prima.

Di-

Diconsi *triangoli uguali fra loro* quelli, de' quali tutti gli angoli, e tutti i lati son uguali fra loro, e l'uno all'altro.

468. Diconsi *triangoli simili*, o *equiangoli* quelli, de' quali tutti gli angoli solamente son uguali, ciascuno a ciascuno. Così i triangoli ABC, DEF (fig. 16) sono simili, perchè l'angolo A=E, l'angolo B=D, e C=F.

469. Quando si paragonan figure fra loro, diconsi parti *omologhe* quelle che sono della stessa denominazione di grandezza in ciascuna figura.

Ne' due triangoli simili, per esempio il più gran lato dell'uno è omologo al più gran lato dell'altro, il mezzano lato dell'uno è omologo al mezzano lato dell'altro ec.

470. Teor. 1. *Due triangoli che han tutti i loro lati omologhi uguali, son uguali tra loro.*

Dimostr. Se AB=*ab*, AC=*ac*, BC=*bc* (fig. 13.) il triangolo ABC = triangolo *abc*. Dai punti A e B come centri descrivansi gli archi FCG, DCE che si taglian alla sommità C. Si applichi poi il triangolo *abc* sul triangolo ABC, mettendo il punto *a* sul punto A; a causa di AB=*ab*, il punto *b* caderà su B: ed a causa di *ac*=AC, la linea *ac* terminerà in qualche parte nell'arco FCG. Similmente a causa di *bc*=BC, qualche parte della linea *bc* terminerà nell'arco DCE. Ma perchè le linee *ac*, *bc* si unisconin *c*, termineran dunque tutte due nel punto C dell'intersezione de' due archi. Dunque *ac* sarà esattamente distesa su AC, e *bc* su BC; e per conseguenza tutto il triangolo *abc* su tutto il triangolo ABC. Dunque questi due triangoli saran uguali.

471. Teor. II. *Due triangoli son uguali fra loro, lorchè tutti gli angoli dell'uno essendo uguali a tutti gli angoli dell'altro, han ciascuno un lato omologo uguale.*

Dimostr. Se l'angolo A=*a*, B=*b*, C=*c* (fig. 13), e AB=*ab*, il triangolo ABC=*abc*. Si metta il lato *ab* su AB, ponendo il punto *a* su A, e *b* su B; è

che ro

chiaro ch' essendo l'angolo $a = A$, e $b = B$, il lato *ac* caderà necessariamente sul lato AC, e *bc* su BC; dunque il punto c caderà sul punto C, e il triangolo *abc* coprirà esattamente il triangolo ABC.

472. Teor. III. *Due triangoli son uguali, se ciascuno ha due lati omologhi uguali, ed uguale l'angolo compreso tra questi lati.*

Dimostr. Se il lato $AC = ac$, $AB = ab$, e l'angolo $A = a$, i trangoli ABC, *abc* son uguali. Si applichi *ab* su AB, e *ac* su AC; essendo uguali gli angoli A, *a*, questi lati caderanno esattamente gli uni sugli altri.

E perchè $AC = ac$, e $AB = ab$, il punto *c* caderà su C, e il punto B su b. Dunque bc che misura la distanza de' punti b, c, sarà uguale e caderà esattamente su BC che misura la distanza de' punti B, C. Dunque il triangolo *abc* coprirà esattamente tutto il triangolo ABC.

473. Teor. IV. *Se di due triangoli simili e inuguali si mette un angolo dell' uno su l' angolo eguale dell' altro, e i lati che comprendono quest' angolo del primo su i lati omologhi dell' altro; il terzo lato del primo sarà parallelo al terzo lato dell' altro.*

Dimostr. Se si mette l'angolo D (figura 16.) sull' angolo uguale B, il lato DF sul suo omologo BC, e DE sul suo omologo BA; il lato FE o *fe* sarà parallelo a AC; poichè essendo simili i triangoli, sarà l' angolo $feB = CAB$; dunque *fe* è parallelo a AC (396).

Se si avesse posto l'angolo F sul suo uguale C, DE sarebbe stata parallela a AB; e se si avesse posto l' angolo E sul suo uguale A, FD sarebbe stata parallela a BC.

474. Teor. V. Reciprocamente *se per un punto* f *preso ad arbitrio sul lato d' un triangolo si tira una retta* fe *parallela alla sua base* AC, *i triangoli* Bfe, BAC *son simili*; perchè gli angoli Bfe, BCA, e Bef, BAC son uguali (396).

Degli

Degli altri Poligoni.

5. Vi ſono tre ſpecie di Poligoni, *irregolari*, *ſi-*
ci, *regolari*.
irregolari ſon quelli che hanno angoli, e lati
ali fra loro (fig. 20, 22, 23).
6. I *ſimetrici* ſon compoſti di lati paralleli e ugua-
ig. 17, 18, 19, 21, 24, 25, 27). Donde ſie-
he hanno neceſſariamente un numero pari di lati.
7. I poligoni *regolari* ſon compoſti d' angoli e di
utti uguali fra loro, e ſimilmente poſti (fig. 26,
8).
8. Un quadrilatero irregolare ſi chiama *Trapezio*
20); un quadrilatero regolare diceſi *Quadrato*
18); e un quadrilatero ſimetrico chiamaſi *Pa-*
ogrammo. Se tutti i ſuoi angoli ſon retti diceſi
elogrammo rettangolo, o ſemplicemente *rettan-*
. fig. 21). Se i ſuoi angoli non ſono retti, e ſe
le' ſuoi lati contigui ſon uguali, diceſi *Rombo*
19). E ſe due de' ſuoi lati ſon inuguali, diceſi
boide (fig. 17).
9. Diceſi angolo *ſaliente* o *conveſſo* quello di cui
tice eſce dalla figura, come ABC (fig. 22, 25);
golo *rientrante* o *concavo* quello di cui il vertice
ntro della figura, come BCD. Donde ſiegue,
on vi è che il Poligono irregolare e ſimetrico che
ver angoli rientranti; poichè tutti quelli del
no regolare ſono ſimilmente poſti (477).
10. Una retta che traverſa un poligono paſſando da
golo all' altro, ſi chiama *Diagonale*.

Proprietà de' Poligoni in generale.

1. Teor. I. *Tutti i poligoni ſi poſſon riduvre in*
triangoli quanti ſon i lati.
chè da un punto C preſo ad arbitrio dentro lo
ſi poſſon tirar delle rette a tutti gli angoli (fig.
20,

20, 23), e ciascun lato divien la base di altrettanti triangoli.

482. Teor. II. *La somma di tutti gli angoli interni d' un poligono è uguale al prodotto di* 180° *moltiplicato pel numero de' lati meno due lati, o meno* 360°.

Dimostr. Perchè la somma di tutti gli angoli d' un Poligono è uguale alla somma di tutti gli angoli de' triangoli, ai quali il poligono è stato ridotto, eccetto gli angoli che son dentro al punto C, de' quali (387) la somma è 360°. Or vi sono tanti triangoli quanti lati; dunque la somma di tutti gli angoli del Poligono è tante volte 180° quanti son i lati, meno 360°.

Onde se un poligono, per esempio, ha 7 lati, la somma di tutti i suoi angoli $= 180° + 7 - 2 = 900°$.

483. Teor. III. *La somma di tutti i supplementi degli angoli di qualunque poligono, che non ha angoli rientranti, è di* 360°.

Dimostr. Perchè (388) ciascun angolo, più il suo supplemento $= 180°$; dunque la somma di ciascun angolo d' un poligono, più il suo supplemento, è tante volte 180°, quanti son i lati; ma (482) la somma di tutti gli angoli d' un poligono è tante volte 180° quanti son i lati meno 360°; dunque la somma di tutti i supplementi è di 360°.

484. Teor. IV. *Se un poligono ha angoli rientranti, la somma di tutti i supplementi degli angoli salienti più gli angoli rientranti, è ugual a* 360 *più tante volte* 180° *quanti sono gli angoli rientranti.*

Dimostr. E' chiaro (fig. 22) che la somma di tutti i supplementi degli angoli salienti del Poligono ABDEF, è 360° (483); ma se in questo Poligono si fa un angolo rientrante DCB, allora l' angolo GDB supplemento dell'angolo EDB si aumenta dell' angolo BDC; e l' angolo DBI supplemento di ABD si aumenta dell'angolo CBD. Or (432) gli angoli CDB, CBD sono 180° coll'angolo rientrante DCB. Dunque lorchè si fa un angolo rientrante in un poligono, si aumen-

tano

ſupplementi de' due angoli ſalienti vicini, d'una
tà che unita all'angolo rientrante fa 180 gradi.
e &c.

Oſſerv. Si può anche ridurre un poligono in
riangoli quanti ſon i lati meno due, con tirare
diagonali ſi può, ſenza che ſi taglino (fig. 22);
me la ſomma di tutti gli angoli di queſti trian-
evidentemente la ſteſſa che quella di tutti gli
nterni del poligono, ſiegue che *queſta ſomma*
volte 180° *quanti ſon i triangoli, o i lati del*
meno due.

Proprietà de' Poligoni Simetrici.

Teor. I. *Se da ciaſcun angolo d' un Poligono*
o ſi tirano le diagonali agli angoli oppoſti ...
lue triangoli oppoſti alla ſommità, e formati
diagonali vicine, ſon uguali. Onde (fig. 17,
) i triangoli BGC, FGE ſon uguali. Perche
atura del poligono ſimetrico eſsendo FE ugual
ela a BC, l' angolo BCG = GFE (396), e
GEF; dunque (471) i trianaoli BGC, FGE
ali; e così è degli altri.

I *Tutte queſte diagonali ſi tagliano recipro-*
in due parti uguali. Perchè tutti i triango-
i, che eſſe formano, ſon uguali.

II. *Tutte queſte diagonali ſi taglian in uno*
nto.

è tagliandoſi le diagonali BE, AD ſcambie-
: in due parti uguali, il punto di mezzo del-
ale BE deve eſser lo ſteſso che il punto di
lla diagonale AD. Parimenti il punto di mez-
diagonale AD è lo ſteſso che il punto di mez-
diagonale FC &c. Dunque il punto di mezzo
le diagonali è un ſolo e ſteſso punto.

eor. II. *Una diagonale tirata da un angolo*
oppoſto, divide un poligono ſimetrico in due
uali e ſimili. Perchè da una parte della diago-
on tanti triangoli uguali e poſti nella ſteſsa
quanti dall'altra.

può dunque chiamar il punto ove ſi tagliano

no le diagonali, il *centro del poligono ſimetrico*, a cauſa della uguaglianza de' raggi che vanno agli angoli oppoſti.

491. Teor. III. *Una retta qualunque* IH (fig. 17, 24, 25) *che paſſa pel centro* G *d' un poligono ſimetrico, vi è diviſa in due parti uguali, e divide il poligono in due figure uguali e ſimili.* Il che ſi dimoſtra come ſopra (486, 489) per l' uguaglianza de' triangoli BIG, HGE, o di IGC, FGH.

492. Teor. IV. *Due rette qualunque che paſſano pel centro d'un poligono ſimetrico, vi ſi tagliano ſcambievolmente in due parti uguali* (491).

493. Non è generalmente vera la reciproca, *ſe due rette qualunque ſi tagliano ſcambievolmente in due parti in un poligono ſimetrico, elle vi ſi taglian al centro.* Poichè ſe nel poligono ſimetrico ABCD (fig. 18) ſi prende CE = BF, e ſe ſi tirano CF, EB, elle ſi taglieranno in due ugualmente in G a cauſa de' triangoli uguali GEC, GFB (471); frattanto il centro G è lungi dal centro H.

Proprietà de' Poligoni Regolari.

494. Teor. I. *Ogni Poligono regolare è iſcrittibile al circolo*, cioè *ſi può far paſſar la circonferenza d' un circolo per tutti i ſuoi angoli.*

Dimoſtr. Per dimoſtrar queſta propoſizione, convien far vedere che al di dentro del poligono regolare vi è un punto C (fig. 26, 27) di cui tutte le diſtanze CA, CB, CD &c. dagli angoli, ſon uguali fra loro.

Dividanſi perciò in due ugualmente tutti gli angoli del poligono per le rette AC, BC, DC, EC &c.

Queſte ſi taglieranno tutte nello ſteſſo punto C, e ſaran tutte uguali fra loro. Perchè, per eſempio, le rette BC, AC incontrandoſi in un punto qualunque C fanno un triangolo ABC: e le rette BC, DC incontrandoſi in un punto qualunque C, fanno un altro triangolo BCD. Or queſti due triangoli ſon uguali, perchè eſſendo uguali tutti gli angoli d' un Poligono regolare,

re, ed essendo quì tagliati in due ugualmente, gli oli CAB, CBA son uguali fra loro e cogli angoli D, CDB; ed i lati compresi AB, BD son anche ali; dunque (471) i triangoli ACB, BCD son isoli e uguali.

Dunque AC = DC = BC; e a causa del lato coe BC, il punto C dell'intersezione AC, BC casul punto C dell'intersezione delle linee BC, DC. stesso è dell'altre linee EC, FC &c.

95. Coroll. I. *I raggi tirati dal centro d'un poli- regolare a tutti i suoi angoli, lo dividon in tanriangoli isosceli e uguali, quanti son i lati.*

96. Coroll. II. *Ciascun lato d'un Poligono regolascritto in un circolo, è la corda d'un arco ugual quoziente di* 360° *diviso pel numero de' lati.* le il lato d'un Decagono è la corda d'un arco 36°.

97. Coroll. III. *Il lato dell'esagono regolare è ugual raggio del circolo, in cui è iscritto.* Perchè se pel tro C dell'esagono (fig. 27) si divide in 6 trian-, si conoscerà facilmente, che questi triangoli son ilateri, a causa de' raggi uguali CA, CB, e dell' olo ACB di 60°; il che fa che ciascun angolo CAB, C è anco di 60° (462): dunque CA = AB.

98. Osserv. E' per questa proprietà dell'esagono re- are, che si divide il circolo ne' suoi gradi, o al- in parti uguali d'un noto valore. Così portando aggio d'un circolo sulla sua circonferenza, si ha un di 60°; se si divide in due ugualmente, si ha un di 30°; se si soddivide in due, si ha un arco di . Il resto della divisione in gradi non si può più fache a tastoni, per l'impossibilità di divider un arco 5° in 3, 5, 15 parti uguali (440). Convien dunche la destrezza supplisca al difetto de' mezzi Georici semplici, per divider un istromento in tutti i gradi.

99. Teor. II. *Ogni Poligono regolare è circoscritle al circolo*; cioè *si può descriver nel di dentro n poligono regolare un circolo, che tocchi tutti i lati nel mezzo.*

Di-

Dimoſtr. Eſſendo i lati d'un poligono regolare iſcritto in un circolo (496) tante corde uguali, queſti lati ſon tutti in ugual diſtanza dal centro (416).

Se dunque dal centro ſi tirano delle perpendicolari a queſti lati, elle caderanno ſul punto di mezzo di eſſi lati (412), e ſaran tutte uguali. Dunque ſi potrà far paſſar un circolo per tutte le lor eſtremità, il quale toccherà (426) tutti i lati del poligono nel mezzo (fig. 28).

500. Teor. III. *Ogni Poligono regolare, di cui il numero de' lati è pari, è un poligono ſimetrico.*

Dimoſtr. Ridotto un poligono regolare in triangoli per mezzo di raggi tirati dal centro agli angoli, ſi vede che per l'uguaglianza di queſti triangoli e del numero pari de' lati, la metà del numero di queſti triangoli è ſeparata dall' altra per un diametro comune AE (fig. 27), il qual è formato da due di queſti raggi oppoſti AC, CE. Or eſſendo uguali i triangoli ABC, ECF, ſon uguali gli angoli FEC, CAB. Dunque (396) i lati FE, AB ſon paralleli e uguali.

501. Probl. I. *Circoſcriver un circolo a un poligono regolare dato.*

Soluz. Non ſi ha da far altro che cercar il centro (494).

502. Probl. II. *Iſcriver un circolo in un poligono regolare dato.*

Sol. Trovato il centro del Poligono (494) ſi tiri a uno de' ſuoi lati una perpendicolare; queſta ſarà il raggio del circolo (499).

503. Probl. III. *Iſcriver in un circolo dato un poligono regolare qualunque.*

Soluz. Si divida 360° pel numero de' lati del poligono richieſto: prendaſi ſul circolo dato un arco ugual al quoziente; la corda di queſt' arco ſarà (496) un de' lati del poligono. Si porti queſta corda intorno alla circonferenza, e ſi avrà iſcritto il poligono richieſto.

Per eſempio; per iſcriver un pontagono regolare, ſi faccia $\frac{360}{5} = 72$, ſi prenda con uno ſtromento eſatto un

arco di 72° ſul circolo dato, e ſe ne tiri la corda
· tutta la circonferenza.

504. Oſſerv. Queſta ſoluzione non è ſempre geome-
ca, ma ſi ſiegue nella pratica.

Per la Geometria Elementare non ſi può iſcrivere
circolo che il *triangolo equilatero*, il *quadrato*,
pentagono, il *pentedecagono*, e tutti i poligoni re-
ari, che han un numero di lati in progreſſione geo-
trica doppia, de' quali queſti quì ſon i primi. On-
il *triangolo equilatero* dà i poligoni regola-
li 6, 12, 24, 48 &c. lati. Il *quadrato* quelli di
16, 32, 64 &c. lati. Il *pentagono* di 10, 20, 40,
&c. Il *pentedecagono* di 30, 60, 120, 240 &c.

Gli altri poligoni, come l' Ettagono, l' Enneago-
, l'Endecagono &c. non poſſon deſcriverſi geome-
amente che col coſtruire dell'equazioni proprie a
cheduno, ma ſon molte elevate.

505. Probl. IV. *Circoſcriver qualunque poligono re-
re a un dato circolo.*

oluz. Si divida 360° pel doppio del numero de' la-
el poligono richieſto, e preſo (fig. 28) un arco
ugual al quoziente, ſi tiri per le ſue eſtremità
G un raggio CF, e una retta indeterminata CB.
alzi ſull' eſtremità F del raggio una perpendico-
AFB, che incontrerà CB in un punto B; ſi por-
B in FA: la linea AB ſarà un de' lati del poli-
richieſto. Nella ſteſſa maniera ſi poſſon cercare
ltri lati; ovvero col raggio BC ſi può deſcriver
ircolo BAHED, e portare per tutta la ſua cir-
renza la corda AB; così vi s'iſcriverà il poligo-
AHED, che ſarà nello ſteſſo tempo circoſcritto
to circolo.

moltr. La coſtruzione fa veder facilmente, che ſi
mo tante tangenti uguali e diviſe in due ugual-
e pel punto del contatto, quanti ſon i lati del
ono richieſto.

Proprietà del Circolo.

506. Teor. I. *Un circolo è un poligono regolare d' un' infinità di lati infinitamente piccoli.*

Dimostr. Quanti più lati ha un poligono regolare, più va a confondersi col circolo, cui è iscritto o circoscritto.

Se dunque egli avesse realmente un' infinità di lati, sarebbe intieramente confuso col circolo, e si potrebbe prender indistintamente il circolo pel poligono. Dunque si può supporre che un circolo è un poligono regolare d' un' infinità di lati. Ma quanto più son i lati d'un poligono regolare, tanto più devon esser piccoli per esser iscritti o circoscritti allo stesso circolo; dunque si può supporre, che un circolo è un poligono regolare d' infiniti lati infinitamente piccoli.

507. Questa considerazione del circolo dipende da questo evidentissimo principio: *Due quantità son uguali, se la loro differenza è più piccola d' alcuna grandezza assegnabile.* Perchè se elle fossero inuguali, la loro differenza potrebbe esser assegnata, che è contro l' ipotesi.

Quando si ha da provare ch' esiste un rapporto d' uguaglianza fra due grandezze, nè si può provarlo *direttamente*, si ristringe a far vedere, che supponendo una maggiore o minore dell' altra, si cade in un' evidente *assurdità*; e quest' altra maniera di provare si chiama *riduzione all' assurdo*. Per dimostrare colla *riduzione all' assurdo*, convien far vedere, che la differenza ch' esisterebbe fralle due grandezze (se mai vi fosse) sarebbe minore della differenza assegnata; e che perciò questa differenza avendo potuto esser supposta d' una picciolezza, che per così dire, esauriste ogni grandezza assegnabile, bisogna per necessità convenire, che la differenza tra queste grandezze svanisca veramente. Or questa picciolezza indicibile, inassegnabile, e che esaurisce qualunque grandezza, è che ha fatto dar a questo metodo il nome di *Metodo di Esaustione*

te, proveniente dalla parola latina Exhauſtio, eſau-
ento.
uesto metodo di *Eſauſtione* diceſi ancora delle *Pri-*
ed ultime Ragioni, ed a questo ſi riferiſce il cal-
Infiniteſimale.
38. Sia il circolo DEB (fig. 29.), di cui un dia-
ro ſia prolungato in fuori in A comunque ſi vo-
; ſuppongaſi la retta AB che girando ſulla ſua
mità fiſſa A deſcriva da una parte e l' altra colla
eſtremità B gli archi BNO, BML, in maniera
paſſi per tutto lo ſpazio racchiuſo nel dato circo-
EB.
ò poſto, è chiaro che la retta AB divenendo tan-
ggi quanti ſon i punti negli archi BO, BL, tut-
ueſti raggi ſaranno inugualmente tagliati sì dalla
concava DYIBKZE, come dalla parte conveſſa
E, in maniera, che ſi può dir in generale....
9. Teor. II. Che *di tutte le rette* AB, AI, AY,
AK, AZ, AE, *che partendo da un punto* A
d' un circolo ſon terminate alla ſua circonfe-
a concava....
La più lunga è quella che paſſa pel centro,
AB,
Tanto ſono più corte quelle che paſſano più
ne dal centro; e quelle che vi paſſan ad ugual
za, ſon uguali.
Le più corte ſon le Tangenti AD, AE.
Non poſſon eſſervi che due ſole rette uguali
ro,
contrario ſi conchiuderà in generale....
5. Teor. III. Che *di tutte le rette* AD, AS,
AG, AF, AQ, AE, che partendo dal punto
ori d' un circolo, van a terminar alla ſua parte
ſſa....
La più corta è quella ch' eſſendo prolungata
ebbe pel centro.
Tanto più lunghe ſon quelle che, prolungan-
aſſerebbero più lungi dal centro; così che quel-
vi paſſan ad ugual diſtanza, ſon uguali.

3.° *Le più lunghe ſon le due che toccan il circolo.*
4.° *Finalmerte non poſſon eſſervi più di due rette uguali fra loro.*

Dimoſtr. Dal centro C ſi tirino de' raggi a tutti i punti della circonferenza, ove queſte rette terminano. Per dimoſtrar il Teor. II., ſi conſiderino le rette AB, AI, AY, AD, AK, AZ, AE, come terzi lati d'un triangolo, i quali devon creſcere (reſtando coſtanti gli altri due lati) a proporzione che l'angolo oppoſto decreſce (460). Onde ſi può riguardar ACB come un triangolo di cui i lati ſono AC, CB, AB, l'angolo ACB è infinitamente ottuſo, e gli angoli, CAB, CBA infinitamente acuti; dunque AB è il più gran lato poſſibile che poſſa unire le eſtremità de' due altri lati coſtanti CA, CB. Così nel triangolo ACI, ove i lati AC, CI ſon uguali ai lati AC, CB del triangolo ACB, l'angolo compreſo ACI è più piccolo dell'angolo ACB, dunque il lato oppoſto AI deve eſſer minore di AB &c. Finalmente ſe IB = BK, cioè ſe le diſtanze di AI, AK ſon uguali, anche queſte due rette ſon uguali, a cauſa de' triangoli uguali ACI, ACK; e così degli altri.

Similmente per dimoſtrar il Teor. III, ſi conſiderino le rette AH, AG, AS, AD, AF, AQ, AE, come i terzi lati de' triangoli ACG, ACH, ACS &c. che devono (460) eſſer tanto più grandi (li due altri lati reſtando li ſteſſi o uguali) quanto più grandi diventano gli angoli oppoſti. Onde la retta ACG eſſendo conſiderata come un triangolo, di cui l'angolo ACG è infinitamente piccolo, il lato oppoſto AG ſarà il più piccolo che poſſa unire l'eſtremità de' lati coſtanti CA, CG; ma nel triangolo ACH, ove i lati AC, CH, ſon uguali ai lati AC, CG del triangolo ACG, l'angolo compreſo ACH è più grande dell'angolo ACG; dunque il lato AH deve eſſer maggiore di AG. Si proverà anche, che il lato AF = AH, ſe paſſano ad ugual diſtanza dal centro C, cioè ſe l'angolo ACF = ACH &c.

511. Se ſopra un punto qualunque A (fig. 30) pre-

eſo in un circolo GOBLG e che tutt' altro ſia che centro C, ſi fa girar una linea indeterminata ACB; a ſarà ſempre tagliata inegualmente per tutti i pun- della circonferenza di eſſo circolo, e ſi conchiuderà generale....

Teor. IV. *Che di tutte le rette tirate da un pun- al di dentro del circolo (tutt' altro che il centro) alla circonferenza,*

.° *La più lunga è quella che paſſa pel centro*, ne AB.

°. *Dell' altre la più corta è quella che paſſa più gi dal centro; così che quelle che ne ſon ugual- nte lontane ſon uguali; nè ve ne ſon che due che on eſſer uguali fra loro.*

.° *La più corta è quella ch' è di ametralmente op- a al centro*, come AG.

. *Prolungandoſi le due che ſon uguali fra loro, diven- corde uguali*. La Dimoſtrazion è la ſteſſa che (510).

12. Coroll. *Se tre linee tirate da un punto preſo circolo fin alla circonferenza, ſon uguali fra lo- queſto punto è il centro.*

13. Teor. V. *Due circoli uguali o inuguali non ſi n tagliar più che in due punti.*

imoſtr. Se poteſſero tagliarſi in tre punti; tirando centro d' uno di queſti due circoli tre rette ai i d'interſezione, elle come raggi d' uno ſteſſo cir. ſarebbero uguali; onde da uno ſteſſo punto che è il centro, alla circonferenza, ſi potrebbero ti- tre rette uguali; il che è impoſſibile (50).

4. Coroll. I. *Due circoli che han tre punti co- i, hanno lo ſteſſo centro e ſon confuſi.*

5. Coroll. II. *Due circoli che non hanno che uno e punti comuni, ſono eccentrici, cioè non han- no ſteſſo centro.*

6. Teor. VI. *Due corde che ſi tagliano in un cir- in tutt' altro punto che nel centro, non poſſon arſi in due ugualmente.*

moſtr. Se ciò poteſſe accadere, una corda tirata entro alla lor interſezione ſarebbe nel tempo ſteſ-

ſo perpendicolare a queſte due corde ; poichè (413) ella le dividerebbe ciaſcuna in due parti uguali ; il che è impoſſibile (403).

517. Coroll. Dunque *ſe due corde ſi taglian in due ugualmente in un circolo , vi ſi taglian al centro , e ſono due diametri.*

518. Teor. VII. *Se due circoli ſi toccano, la retta che paſſa per il loro centro, paſſa anche per il loro punto di contatto.*

Dimoſtr. 1.° Se ſi toccan in fuori (fig. 29) il più corto cammino dal centro A al centro C è paſſare per il punto del contatto G ; poichè allora queſto cammino è ugual alla ſomma de' raggi AG + GC ; ma non paſſando per G, biſogna deſcriver oltre queſti raggi , uno ſpazio compreſo fra i due circoli.

2.° Se toccanſi in dentro (fig. 30) il punto del contatto G eſſendo comun ai due circoli , il più corto cammino dal centro A al punto G deve eſſer la più corta linea che ſi poſſa tirar da queſto centro al gran circolo GLBOG ; or (511) la più corta linea , che ſi poſſa tirare da un punto, che non ſia il centro , alla circonferenza d'un circolo , è nella direzione del centro di queſto circolo. Dunque la GA che paſſa pel centro A del piccolo circolo, e pel punto del contatto G , è anche nella direzione del centro del gran circolo GLBO.

519. Probl. *Da un punto dato fuori di un circolo tirar una tangente a queſto circolo.*

Soluz. Sia dato il punto A (fig. 33.) da dove ſi abbia da tirar una tangente al circolo dato EBH. Si tiri dal punto A al centro la retta AC , dal cui mezzo G deſcrivaſi un ſemicerchio AEC , di cui ella ſia un diametro ; e pel punto E , ove il ſemicircolo taglia il circolo dato, ſi tiri la retta AEL ; deſſa ſarà la tangente a queſto circolo.

Dimoſtr. Se ſi tira il raggio CE , ſi vedrà (432) che l'angolo AEC è retto, che per conſeguenza AE è una retta perpendicolare all' eſtremità del raggio CE ; e che perciò ella tocca il circolo (426.)

Of-

Oſſerv. Chiaramente ſi vede che queſto problema a ue ſoluzioni; poichè ſi avrebbe potuto deſcriver il emicircolo CEA dal lato di H, e per conſeguenza irar una tangente da quella parte.

Delle Linee Proporzionali.

520. Ipoteſi. Se ſi taglian due rette qualunque AB, AC (fig. 34) che fanno un angolo qualunque BAE, er un numero qualunque di parallelle DH, EI, K, GL &c. ugualmente lontane le une dall' al- re.....

1.° *Tutte le parti* AH, HI, IK, KL &c. *della inea* AC *ſaranno uguali fra loro, come altresì le arti* AD, DE, EF &c. *della linea* AB. Perchè ſe a ciaſcun punto ove ciaſcuna parallela taglia le linee AB, AC ſi abbaſſano delle perpendicolari AV, DM, EN &c. AV, HQ, IK &c. è chiaro che i triangoli ettangoli ADV, DEM, EFN &c. ſon uguali fra lo- o (471), perchè la diſtanza uguale di queſte pa- alle'e rende le perpendicolari uguali fra loro, e le oro interſezioni per la linea AB rendon uguali gli ngoli ADV, DEM, EFN &c. Per la ſteſſa ragione i riangoli rettangoli AHV, HQI, IRK &c. ſon u- uali. Dunque le ipotenuſe AD, DE, EF &c. ſon guali fra loro, e AH, HI, IK, DE, EF &c. ſon nche tra loro eguali.

2.° *Un numero qualunque di parti di* AC, *ſarà l numero delle parti di* AB *intercette tra le ſteſſe arallele, come un altro numero qualunque delle arti di* AC, *al numero delle parti di* AB *contenu- e tra le ſteſſe parallele*. Poichè da una parte AD= DE = EF &c. e dall'altra AH = HI = IK &c. è hiaro che AD: DE:: AH: HI, perchè il quoziente i queſte due ragioni è 1. Dunque (262) AD : AH :: DE : HI. Similmente DE : EF : HI : IK, DE : HI :: EF : IK. Dunque AD : AH :: DE : HI :: EF : IK; e ſi può dir ancora :: FG : KL :: GB : LG. Donde ſiegue (268) che AB

ſomma di tutti gli antecedenti, è a AC ſomma di tutti i conſeguenti, come AD è a AH, o come un' altra parte qualunque di AB è alla parte corriſpondente in AC, o (255) quante parti ſi verranno in AB ſono allo ſteſſo numero di parti in AC.

Or queſto numero di parti è determinato dall'intervallo fra due parallele. Dunque &c.

521. Teor. I. fondamentale. *I triangoli ſimili han tutti i lati omologhi proporzionali fra loro.*

Dimoſtr. Poichè (473) due triangoli ſimili poſti l'uno ſull'altro, hanno i loro terzi lati paralleli, ſe ſi ſuppone tutto lo ſpazio del triangolo ABC (fig. 16) ripieno di rette infinitamente proſſime e parallele a AC, i lati BA, BC ſi troveranno nel caſo delle rette AB, AC della fig. 34, e *fe* ſarà una di queſte parallele. Si avrà dunque BA : BC :: Be : Bf; o ſoſtituendo AB : BC :: DE : DF; o (262) BA : DE :: BC : DF. E così degli altri lati.

522. Oſſerv. E' anche evidente (520) che le parti Ae, Cf ſon proporzionali ai lati BA, BC; o Ae : Cf :: BA : CB :: DE : DF.

523. Teor. II. *Due Triangoli che hanno i tre lati omologhi proporzionali, ſon equiangoli e ſimili.*

Dimoſtr. Se (fig. 16) AC : BC :: FE : FD, e AC : AB :: FE : ED, i triangoli ABC, DEF ſon equiangoli. Perchè ſe ſopra EF ſi coſtruiſce un triangolo FEG equiangolo al triangolo ABC, facendo l'angolo GEF = BAC, e GFE = BCA, ſi avrà (521) AC : BC :: FE : FG; ma ſi ha ſuppoſto AC : BC :: FE : FD, dunque FE : FG :: FE : FD; dunque (259) FD = FG. Similmente per i triangoli ſimili ABC, FEG ſi ha (521) AC : AB :: FE : EG; ma ſi ha ſuppoſto AC : BA :: FE : ED; dunque FE : EG :: FE : ED; dunque (259) EG = ED. Dunque i triangoli FED, FEG ſon equiangoli e uguali (470), poichè hanno il lato comune FE, e i lati FD = FG, e EG = ED. Or per la coſtruzione il triangolo FEG è equiangolo al triangolo ABC; dunque il triangolo FED gli è anche equiangolo.

524.

24. Teor. III. *Due triangoli che han due lati omo-i proporzionali intorno a un angolo uguale, son iangoli.*

imoſtr. Se ne' triangoli ABC, DEF l'angolo D=B, DE: DF::BA: BC, il triangolo DEF è equian-a ABC.

prenda ſu BA la parte Be=DE, e ſi tiri a AC arallela *ef*, i triangoli ABC, e Bf ſon equiango- perchè la parallela *ef* fà l'angolo fe B = A, efB , e l'angolo B è comune. Dunque (521) Be: Bf:: :BC; ma ſi ha ſuppoſto DE: DF:: BA: BC; dun- Be: Bf:: DE: DF; or Be = DE, dunque (255) =DF, dunque (472) i due triangoli Bef, DEF ſon ali e ſimili; ma B f è equiangolo a ABC, dunque F è equiangolo a ABC.

25. Teor. IV. *Una retta* AD, *che taglia in due almente un angolo* BAC (fig. 37) *d'un triango- taglia il ſuo lato oppoſto* BC *in due parti* BD, *proporzionali ai lati* AB, AC, vale a dire BD: :: AB: AC.

Dimoſtr. Si prolunghi indefinitamente AC, e per B iri BE parallela a AD; i triangoli BCE, DAC n ſimili (474); dunque (522) BD: DC:: AE: AC; per le paral ele l'angolo BEA = DAC = DAB = E; dunque (463) il triangolo BAE è iſoſcele; que AE = AB; dunque ſoſtituendo BD: DC:: :AC.

26. Teor. V. *Se dall'angolo retto* E (fig. 35) *a' triangolo rettangolo* CEL *ſi abbaſſa ſull ipotenuſa una perpendicolare* EO; 1.° *ella dividerà il trian- in due altri triangoli rettangoli* COE, OEL *ſi- i tra loro, e al triangolo* CEL. 2.° *Queſta per- dicolare* EO *ſarà media proporzionale tra i ſeg- nti* CO, OL *dell' ipotenuſa*. 3.° *Ciaſcun lato del ngolo* CEL *ſarà medio proporzionale tra l'ipote- a* CL *e il ſegmento contiguo a queſto lato.*

Dimoſtr. I triangoli COE, OEL ſon ciaſcuno ſimili triangolo CEL, perchè oltre un angolo retto han- ciaſcuno un angolo comune col triangolo CEL,

donde

donde ſiegue che ſon anche ſimili fra loro, e per conſeguenza . . . .

Nel triangolo CEO il piccolo lato CO è al lato medio EO, come nel triangolo EOL il piccolo lato EO è al medio LO, o ∴ CO : EO : LO.

Nel triangolo CEO il piccolo lato CO è alla ſua ipotenuſa EC, come nel triangolo CEL il piccolo lato EC è all' ipotenuſa LC; o ∴ CO : CE : CL.

Nel triangolo EOL il medio lato LO è alla ſua ipotenuſa EL, come nel triangolo CEL il medio lato EL è all' ipotenuſa LC; o ∴ LO : LE : LC.

527. Coroll. I. *La ſomma de' quadrati de' due lati d' un triangolo rettangolo è ugual al quadrato dell' ipotenuſa.* Poichè eſſendo ∴ CO : CE : CL, ſi ha (271) $CE^2 = CO \times CL$. Ed eſſendo ∴ OL : LE : CL, ſi ha $LE^2 = OL \times CL$. Dunque $CE^2 + LE^2 = CO \times CL + OL \times CL = (CO + OL) \times CL = CL \times CL = CL^2$.

528. Coroll. II. Poichè $CE^2 + LE^2 = CL^2$, ſiegue che $CE^2 = CL^2 - LE^2$, e che $LE^2 = CL^2 - CE^2$; vale a dire, che *il quadrato d' un lato qualunque d' un triangolo rettangolo è ugual all' eccesſo del quadrato dell' ipotenuſa ſul quadrato dell' altro lato.*

529. Coroll. III. *La diagonale d' un quadrato è incommenſurabile rapporto al lato del quadrato.* Poichè la diagonale eſſendo l'ipotenuſa d'un triangolo rettangolo, di cui i lati ſon uguali, il quadrato della diagonale è ugual alla ſomma de' quadrati di queſti lati, cioè al doppio del quadrato d' uno di queſti lati. Or la radice d' un quadrato doppio d'un altro non ſi può eſprimer in numeri; dunque ſe il valore del lato del quadrato è eſpreſſo in numeri, quello della diagonale non potrà eſſerlo; e reciprocamente.

530. Teor. VI. *La perpendicolare* EO (fig. 41) *tirata dalla circonferenza d' un circolo a un diametro* CL, *è media proporzionale tra le parti* CO, OL *di queſto diametro.* Ovvero, *il ſuo quadrato* = CO × OL.

Di-

Dimoſtr. Se dal punto E ſi tiran alle eſtremità di
ſto diametro le rette EC, EL, il triangolo CEL
ettangolo in E (432); onde (526) ∴ CO:EO:
, o $EO^2 = CO \times OL$.

32. Teor. VII. *Le parti di due corde* BA, DC
. 38) *che ſi taglian in un circolo, ſon reciproca-
nte proporzionali.*

Dimoſtr. Se ſi tirano DA, CB, i triangoli BEC,
AE ſon ſimili, a cauſa degli angoli uguali in E,
li angoli C ed A appoggiati ſullo ſteſſo arco BD,
egli angoli B, e D appoggiati allo ſteſſo arco AC.
nque AE:DE::CB:BE.

32. Teor. VIII. *Se due linee* EB, EC (fig. 39)
*tendo da uno ſteſſo punto fuori nel circolo vanno
erminar alla ſua circonferenza concava, le loro
ti eſteriori* EA, ED *ſon reciprocamente propor-
nali a quelle linee intiere* EB, EC; cioè EA:
)::EC:EB.

Dimoſtr. Tirate le corde AC, DB, i triangoli EBD,
AC ſon ſimili, perchè hanno l'angolo E comune, e
angoli B, e C appoggiati ſullo ſteſſo arco. Dun-
e (521) EA:ED::EC:EB.

533. Teor. IX. *Se due linee* EB, Ed (fig. 39) *par-
do dal punto* E *fuori del circolo, l'una* EB *entra
ntro, e l'altra è tangente; queſta tangente è me-
proporzionale tra l'altra linea* EB *intiera e la
r parte eſteriore* EA; o ∴ EB:Ed:EA.

Dimoſtr. Tirate dB, dA, i triangoli EdB, EdA
ſmili, per l'angolo comune E, e l'angolo EBd=
E miſurati dalla metà dell'arco Ad (430, 429);
le l'angolo dAE = EdB; dunque (521) EB:Ed:
d:EA.

534. Teor. X. *Le parti di due rette che ſi taglian
a due parallele, ſon proporzionali fra loro.*

Dimoſtr. I triangoli ABE, CED (fig. 40) ſon ſi-
li per l'angolo E ugual in ciaſcuno (389), per
angolo EAB = EDC (396), e per l'angolo
BA = ECD; dunque (521) EA : ED : : EB :
,

535.

Or BF — BA = BD = BC, perchè FD = BA ed doppia di EA metà di AB; e BA = BD = AC. ue ſoſtituendo BC : BA : : AC : BC, o = BA : AC.

ſoluzione di queſto problema ſi chiama *divider etta in media ed eſtrema ragione*. Si è chiama- che la *Sezione Divina* per le maraviglioſe pro- che ſe le ſon attribuite.

a comparazione delle Figure; o delle proprietà delle Figure ſimili.

. *Due figure qualunque ſon ſimili, lorchè aven- numero uguale di lati, tutti i lati nell'una ſon rzionali ai lati omologhi dell'altra; e tutti gli dell'una compreſi tra queſti lati omologhi, ſon a tutti gli angoli dell'altra, ciaſcuno a cia-*. Onde ſiegue:

Che tutti i poligoni regolari della ſteſsa ſpecie, conſeguenza i circoli, ſon figure ſimili, come gli archi aventi ugual numero di gradi.

Che due figure ſimili non differiſcono che nella zza.

. Teor. I. *Di qualunque maniera due figure ſi- en diviſe in triangoli per le diagonali prove- da angoli omologhi, i triangoli omologhi ſon ſi-*

oſtr. Se due poligoni ABCDE, FGHIK (fig.) ſon tali, che l'angolo A = F, B = G, C = = I, E = K; e ſe AB : FG : : BC : GH : : HI : : DE : IK : : EA : KF; ſe ſi menan le ali AC, AD, FH, FI, i triangoli ABC, FGH imili, come anche ACD, FHI, e ADE. FIK. hè eſſendo l' angolo B = G, ed eſſendo com- tutti due tra lati Proporzionali, i triangoli ABC, FGH ſon ſimili, come anche ſono ADE,

poſto l' angolo BAC = GFH, e DAE = IFK; : l'angolo BAE — BAC — DAE = CAD =

Della

Della ſteſſa maniera ſi prova che gli angoli ACD, FHI ſon uguali, come lo ſon anche ADC, FIH. Dunque i triangoli ACD, FHI ſon anche equiangoli.

542. Teor. II. Reciprocamente. *Due figure qualunque ſon ſimili, ſe poſſon ridurre in altrettanti triangoli equiangoli.*

Dimoſtr. Gli angoli uguali de' triangoli equiangoli rendon uguali gli angoli omologhi di ciaſcuna figura; e i lati delle figure eſſendo anche lati di triangoli equiangoli, ſono (521) proporzionali. Dunque le figure ſon ſimili (540).

543. Teor. III. *Se in due poligoni ſimili ſi tiran delle linee qualunque della ſteſſa maniera*, cioè *che dividan i lati omologhi o gli angoli omologhi nella ſteſſa ragione; 1.° queſte linee ſon proporzionali fra loro e ai lati omologhi qualunque di queſti poligoni; 2.° le dividon in parti, di cui le omologhe ſon porzioni ſimili de' due poligoni.*

Dimoſtr. 1°. Avendo diviſo BC in L (fig. 43, 44), e il ſuo omologo GH in M nella ſteſſa ragione, cioè in maniera che BC:GH::LC:MH: o ch'è lo ſteſſo, avendo preſo ſopra BC e GM i punti corriſpondenti, o ſimilmente poſti L, M, ſe ſi menan due rette a volontà LN, MO, che facciano gli angoli CLN, HMO uguali nello ſteſſo modo, e che dividan i lati omologhi ED, KI nella ſteſſa ragione, in maniera che ED : KI :: DN : IO; ſarà LN:MO:: CD : HI :: BC : GH.

Perchè ſe ſi menano NC, OH, i triangoli NCD, OHI ſon ſimil (524), avendo gli angoli uguali D, I compreſi tra i lati proporzionali ND, DC; OI, IH; dunque (520) CD : HI :: CN : HO, e l' angolo DCN=IHO. Se dunque queſti ſi tolgono dagli angoli uguali DCL, IHM, reſteranno gli angoli NCL, OHM; dunque anche (523) i triangoli NCL, OHM ſon ſimili: dunque LN : MO :: LC : MH :: BC : GH :: CD : HI &c.

2.° Se ſi tiran anche della ſteſſa maniera due altre ret-

a queſte due figure; ſi proverà che ſon fra lo-
e due lati omologhi qualunque, ed in conſe-
elle ſon anche proporzionali alle linee LN,

finalmente è evidente, che le linee LN, MO
le due figure in quattro, di cui le omologhe
E, FGMOK ſon figure ſimili, e nello ſteſſo
porzioni ſimili de' due poligoni, poichè i lor
omologhi ſon uguali, i loro lati omologhi pro-
iali, e perciò non devon differir fra loro ſe non
ina è più grande dell'altra, a proporzione che
' poligoni è più grande dell' altro. Lo ſteſſo è
porzioni LNDC, MOIH.

Poſſon dirſi *dimenſioni omologhe* due linee co-
N. MO, tirate nella ſteſſa maniera in due figu-
ili; così due lati omologhi di due figure ſimili,
i di due circoli, i loro diametri, o anche due
, che ſi ſottendono un arco d' ugual numero di
ſono dimenſioni omologhe: e la proprietà ge-
delle figure ſimili è *di aver tutte le loro di-
mi omologhe proporzionali fra loro.*

CAPITOLO II.

Delle ſuperficie, o della Planimetria.

Del contorno delle ſuperficie, e della loro comparazione.

TEorema I. *Il contorno, o perimetro d' una figura qualunque, è ugual alla ſomma de' lati.*

5. Teor. II. *I contorni di due figure ſimili ſon oro come un lato, o come una dimenſione omo- qualunque in ciaſcuna figura.*

moſtr. Il contorno della prima figura è al con- della ſeconda, come la ſomma de' lati della pri- è alla ſomma de' lati della ſeconda; e poiche le e ſon ſuppoſte ſimili, hanno (540) tutti i loro

lati

lati omologhi proporzionali, così che i lati della prima ſono gli antecedenti, e i lati omologhi della ſeconda i conſeguenti. Or la ſomma degli antecedenti è alla ſomma de' loro conſeguenti, come un ſol antecedente qualunque è al ſuo conſeguente (268); dunque il contorno della prima figura è al contorno della ſeconda, come un lato qualunque della prima è al lato omologo della ſeconda, o (543) come una dimenſione qualunque della prima alla dimenſione omologa nella ſeconda.

547. Coroll. *Le circonferenze de' circoli, o le lunghezze di due archi d'uno ſteſſo numero di gradi in circoli inuguali, ſon fra loro come i raggi di queſti circoli, o come i loro diametri, o come due corde ſottendenti in ciaſcun circolo o arco un ugual numero di gradi*. Perchè (540) i circoli o gli archi di ugual numero di gradi, ſon figure ſimili; e i raggi, i diametri &c. ne ſono dimenſioni omologhe (544).

Delle Miſure proprie per determinare la grandezza delle Superficie.

548. Si chiama *ſoprafaccia*, *aja*, o *ſuperficie* d' una figura la quantità ch' eſprime lo ſpazio rinchiuſo fra i lati della figura.

549. Una ſuperficie è un' eſtenſione in cui ſi conſiderano due dimenſioni per volta (356). La miſura preciſa di ciaſcuna di queſte dimenſioni in particolare è la linea retta; ma ella non può eſſer la miſura della ſuperficie. Onde non ſi avrebbe l' idea della ſuperficie d' un terreno, ſe ſi diceſſe ſolamente che ha 100 piedi di lunghezza; ma ſe ſi aggiunge ch' egli ha da per tutto 20 piedi di larghezza, ſubito ſe ne concepiſce tutta l' eſtenſione, ſuppoſto che ſi ſappia qual ſia la lunghezza aſſoluta di un piede; ma indipendentemente da queſta cognizione, ſi avrebbe una idea chiara della figura di queſto terreno, che ſi concepirebbe come un parallelogrammo, di cui la lunghezza è quintupla della larghezza.

550. Le

. Le misure delle superficie devon esser super-
come le misure delle linee son linee. Se si vuol
ir una superficie in piedi o in tese, bisogna im-
delle superficie ciascuna d' un piede o d' una
Or non si concepisce naturalmente un piede in
icie che immaginando uno spazio (e per conse-
a una figura terminata da lati) che abbia da
itto un piede di lunghezza e un piede di lar-
a: questa lunghezza deve esser misurata (402)
a perpendicolare ai due lati terminanti la lun-
i della figura; e la larghezza deve essere misu-
a una perpendicolare ai due lati terminanti
ghezza. Dunque lo spazio d' un piede di super-
eve esser una figura, di cui ciascun lato e cia-
perpendicolare tirata tra i lati opposti, sia d' un
dunque questa figura deve esser un quadrato.
Jo è delle altre specie di misure.
Donde si può conchiuder in generale, che il *qua-*
è la misura comune della superficie.
e per disegnare la grandezza della superficie d'
jura qualunque, si dice, ch' ella ha tanti pol-
iedi, tese &c. quadrati; il che significa che si
prire tutto lo spazio rinchiuso con tanti qua-
iascuno d' un pollice, d' un piede, d' una te-

E' chiaro che *il numero delle parti d' una*
in superficie, è ugual al quadrato delle par-
stessa misura in lunghezza, o in larghezza.
esempio, un piede quadrato deve contenere
adrati d' un pollice l' uno.
nè un piede quadrato contiene 12 file di 12
quadrati, e ciascun pollice in larghezza corri-
in lunghezza. Così una tesa quadrata contie-
le ciascuna di 6 piedi quadrati.

Metodo generale di Misurare la Superficie.

Se si suppone che la linea *AB* (fig. 19, 21)
a parallelamente a se stessa finchè sia venuta

in DC; si concepisce ch' ella avrà ricoperto tutta la superficie del parallelogrammo ABCD; perchè a ciacun passo ch'ella avrà fatto, avrà coperto una parte della superficie uguale alla sua lunghezza AB. Dunque la superficie intiera è uguale a questa lunghezza AB presa tante volte, quanti passi ha fatto la retta AB per venire da AB in CD. Or questo numero di passi è misurato dal numero de' punti della retta, che misura la distanza delle due parallele AB, CD, la quale retta deve essere (402) una perpendicolare tirata da un punto qualunque di DC sopra AB (prolungata s' è necessario), com' è EF, o DG. Dunque la superficie del parallelogrammo ABCD è ugual al numero de' punti di AB, preso tante volte quanti punti son in EF; o ch' è lo stesso, è ugual al prodotto della linea AB moltiplicata per la linea EF.

554. La perpendicolare EF o DG che misura la distanza tra i due lati paralleli, si chiama l' *altezza* del parallelogrammo; ed uno di questi due lati si chiama la *base*. Dunque

555. Teor. I. *La superficie d' un parallelogrammo qualunque è ugual al prodotto della sua base per la sua altezza.*

556. Oss. I. Che cosa vuol dir il prodotto della base per l' altezza? Le linee non si moltiplicano per linee. In ogni moltiplicazione una delle due quantità almeno deve esser un numero astratto; moltiplicare è prender un certo numero di volte una certa cosa o un certo numero di cose: Si può moltiplicar una linea per un numero, per esempio, per 3; il che significa che si prenderà questa linea 3 volte; ma non si moltiplica già una linea per una linea: questa operazione non presenta alcun idea netta. Quando si dice, che *la misura del parallelogrammo è il prodotto della sua base per la sua altezza*, significa che se si suppone la base divisa in un certo numero di parti uguali, per esempio, di piedi, di polici &c. e l' altezza parimenti divisa in un certo numero delle stesse parti uguali, piedi, o pollici &c, il rapporto

del

arallelogrammo al quadrato di ciaſcuna delle ſue ; ſarà uguale al rapporto che il prodotto de'due ri di diviſione della baſe e dell' altezza avrà inità : Supponendo per eſempio la baſe diviſa in ollici ; e l' altezza in 25 , il prodotto di queſti numeri 2500 , cioè il rapporto di queſto numero nità , eſprimerà il rapporto del parallelogrammo adrato fatto di un pollice ; infatti queſto paral- rammo contiene 2500 piccoli quadrati ciaſcuno pollice : Onde il dire che *un parallelogrammo rodotto della ſua baſe per la ſua altezza* , è maniera compendioſa d' eſprimer quella propoſi- , di cui l' enunciato rigoroſo e ſviluppato av- richieſto troppo eſtenſione e circolocuzione . Le ze han biſogno di queſte eſpreſſioni riſtrette ; oichè ſon poco eſatte , vi è biſogno ancora di fiſ- ſenſo preciſo ; che vi deve eſſer attaccato.

7. Oſſerv. II. Ciaſcuna delle tracce della retta (di cui la ſomma uguaglia la ſuperficie del paral- rammo ABCD) è realmente un piccolo paralle- immo ; che ha per larghezza l' eſtenſione di cia- paſſo di AB . Ma ſiccome queſt' eſtenſione è in- mente piccola , ſi può confondere ciaſcuna trac- olla linea AB , attribuendo a queſta linea AB larghezza infinitamente piccola.

può dunque dir in generale ; che *la ſuperficie na figura qualunque è ugual alla ſomma di tut- linee ; che ſi poſſon tirar in queſta figura pa- le a un de' lati.*

8. Teor. II. *La ſuperficie d' un triangolo qua- ue è ugual alla metà del prodotto d' uno de' ſuoi qualunque moltiplicato per la perpendicolare ata dall' angolo oppoſto ſopra queſto lato* (pro- ato ſe biſogna) . Perchè un parallelogrammo è ſo da una diagonale in due triangoli uguali ; ſi dunque riguardare un triangolo qualunque come metà d' un parallelogrammo ; o di cui l' altezza è erpendicolare abbaſſata dall' angolo ſopra il lato poſto ;

Questo Teorema può dimostrarsi in quest' altra guisa.

La superficie d' un triangolo qualunque ABC (fig. 34) è ugual alla somma di tutte le linee parallele BC, GL, FK &c. che possono tirarsi dalla sua base BC fin al suo vertice; or tutte queste parallele decrescon in progressione aritmetica, cioè han sempre una stessa differenza; perchè GL differisce da BC della quantità BP + TC, e FK differisce da GL di GO + SL &c. Quelle differenze son tutte uguali fra loro, poichè tutti i piccoli triangoli GBP, FGO &c. son tutti fra loro uguali (520), come anche i triangoli LTC, KSL &c.; dunque PB + TC = GO + SL.

Si possono dunque riguardare tutte queste parallele, che riempion la superficie del triangolo, come una serie di quantità in progression aritmetica, di cui la perpendicolare AX esprime il numero, BC è l' ultimo termine, e A ch' è una parallela infinitamente piccola, è il primo termine. E (242) la somma è uguale a $\overline{BC + A} \times \frac{1}{2} AX$; o perchè A è una linea infinitamente piccola, la somma di tutte queste parallele = BC × $\frac{1}{2}$ AX, o alla metà del prodotto di BC × AX.

559. Coroll. *Un numero qualunque di triangoli* (e per conseguenza *di parallelogrammi*) *che son tra due parallele, e che hanno una stessa base, o basi uguali han ugual superficie*. Perchè hanno anche la istessa altezza, ch' è la distanza di queste due parallele.

560. Teor. III. *Le superficie de' triangoli son tra loro in ragion composta delle basi e delle loro altezze.*

Dimostr. Le superficie de' triangoli son la metà del prodotto delle loro basi per le loro altezze; or le metà son tra loro come i tutti: dunque le superficie de' triangoli son come i prodotti delle loro basi per le loro altezze.

Ma una ragione de' prodotti è una ragion compo-

sta

delle loro radici ; dunque le ſuperficie de' trian-
ſon in ragion compoſta delle loro baſi e delle lo-
ltezze.

51. Coroll. *Le ſuperficie di due triangoli inugua-
be han baſi uguali , ſon tra loro come le lor al-
ze ; e le ſuperficie de' triangoli inuguali che han
zze uguali , ſon tra loro come le loro baſi.*

)imoſtr. Perchè allora le ſuperficie ſon tra loro
e i prodotti d'una ſteſſa quantità moltiplicata per
quantità inuguali ; dunque ſon come queſte quan-
inuguali.

62. Teor. IV. *Se le altezze di queſti due trian-
ſon in ragion inverſa delle loro baſi , le ſuperfi-
ſon uguali.*

)imoſtr. Allora le altezze del primo eſſendo all'
zza del ſecondo , come la baſe del ſecondo alla
del primo ; il prodotto dell' altezza del primo
la ſua baſe è ugual al prodotto dell' altezza del
ndo per la ſua baſe.

63. Teor. V. Reciprocamente ; *ſe due triangoli
non ſono ſimili , hanno ſuperficie uguali , le lo-
dimenſioni ſon in ragion inverſa.*

)imoſtr. Allora le dimenſioni del primo triangolo
o un prodotto ugual a quello delle dimenſioni del
ndo, Dunque le dimenſioni d' uno di queſti trian-
ſono gli eſtremi d' una proporzione , e le dimen-
i dell'altro ſon i mezzi . Per eſempio , l' altezza
primo triangolo è all' altezza del ſecondo , come
aſe del ſecondo è alla baſe del primo . Dunque
lte dimenſioni ſon in ragion inverſa.

64. Teor. VI. *Le ſuperficie de' triangoli ſimili
tra loro in ragion duplicata , o come i quadra-
l' una delle loro dimenſioni omologhe preſa in
cuno.*

)imoſtr. Avendo (544) le figure ſimili tutte le
dimenſioni omologhe proporzionali , le ſuperficie
lue triangoli ſimili ſon fra loro come due prodot-
i due quantità proporzionali . Or (252) una ra-
ie di prodotti di due quantità proporzionali è una

ragion duplicata ; dunque le ſuperficie di due triangoli ſimili ſon tra loro in ragion duplicata . Ma una ragion duplicata è (257) la ragione del quadrato d' un antecedente qualunque preſo in una delle due ragioni che ſervon di radice alla ragion duplicata , al quadrato del ſuo conſeguente . Dunque le ſuperficie di due triangoli ſimili ſon tra loro come il quadrato d' una dimenſione qualunque preſa nell' uno , al quadrato della dimenſione omologa preſa nell' altro . Il che ſi eſprime in generale dicendo , che ſon in ragion duplicata delle loro dimenſioni omologhe qualunque.

565. Teor. VII. *La ſuperficie d' una figura qualunque è ugual alla ſomma delle ſuperficie de' triangoli, ai quali ella è ridotta.*

566. Teor. VIII. *Per aver la ſuperficie d' un poligono irregolare , convien dividerlo in triangoli , prender la ſuperficie di ciaſcuno* (558) ; *la ſomma di tutte queſte ſuperficie ſarà ugual a quella del poligono.*

567. Teor. IX. *La ſuperficie d' un poligono regolare è ugual al prodotto della perpendicolare tirata dal centro a uno de' ſuoi lati , moltiplicata per la metà del ſuo contorno.*

Dimoſtr. Poichè tutti i triangoli , ne' quali ſi è ridotto un poligono regolare per mezzo de' raggi , ſon uguali fra loro (495) , e hanno in conſeguenza una ſteſſa altezza $=$ CI (fig. 26) ; la ſuperficie del poligono regolare è ugual a CI $\times \frac{1}{2}$ AB $+$ CI $\times \frac{1}{2}$ BD $+$ CI $\times \frac{1}{2}$ DE $+$ CI $\times \frac{1}{2}$ EF $+$ CI $\times \frac{1}{2}$ GF $+$ CI $\times \frac{1}{2}$ GH $+$ CI $\times \frac{1}{2}$ HA . Or tutto queſto prodotto è ugual a CI moltiplicato per $\frac{1}{2}$ AB $+ \frac{1}{2}$ BD $+ \frac{1}{2}$ DE $+ \frac{1}{2}$ EF $+ \frac{1}{2}$ FG $+ \frac{1}{2}$ GH $+ \frac{1}{2}$ HA , vale a dire per la metà del contorno del poligono.

568. Coroll. I. *La ſuperficie d' un circolo è ugual al prodotto del ſuo raggio per la ſua ſemicirconferenza*

569. Coroll. II. *La ſuperficie d' un circolo è ugual a quel.*

quella di un quadrato, di cui il lato è una media oporzionale geometrica tra il raggio di queſto cir-'o e una linea della ſteſſa lunghezza della ſemi-conferenza.

570. Coroll. III. *La ſuperficie di un ſettore di cir-o è ugual al prodotto del raggio di queſto circolo, r una linea retta ugual alla metà della lunghez-dell' arco, che termina queſto ſettore.* Perchè la erficie d' un ſettore di circolo è una porzione di igono regolare, come HCDBAH (fig. 26); or :hiaro che la ſuperficie di queſta porzione è ugual prodotto di CI per la metà del contorno HABD.

571. Teor. X. *Un poligono qualunque* ABCDE g. 36) *può ridurſi in un triangolo* AEG *d' una la ſuperficie.*

Dimoſtr. Si tiri una diagonale BD che tagli il trian-o DBC; pel ſuo vertice C ſi tiri a queſta diago-e la parallela CF terminata al lato AB (prolunga-ſe biſogna): ſi congiunga DF, e ſi avrà un poli-o AFDE ugual in ſuperficie al poligono propoſto, he avrà un angolo di meno. Perchè ſe da' trian-DBC, DBF uguali in ſuperficie (559) ſi toglie riangolo comune DBH, reſterà il triangolo DHC al in ſuperficie al triangolo BHF. Or per la co-zione il triangolo DHC è eſcluſo dal nuovo poli-o, e'l triangolo BHF vi è entrato, dunque queſto gono è ancora uguale in ſuperficie al poligono pro-o. Operando nella ſteſſa maniera, ſi può ridurre uovo poligono AFDE in un altro della ſteſſa ſu-icie, e che abbia un angolo di meno, e così ſuc-vamente finchè ſia ridotto ad un triangolo.

572. Coroll. *La ſuperficie d' una figura qualun-è un ſol prodotto di due dimenſioni, o vi ſi può rre.*

573. Teor. XI. *Le ſuperficie di due figure ſimili tra loro in ragion duplicata, o come i quadra-una delle loro dimenſioni omologhe, preſa in cuna.*

Dimoſtr. Poichè (543) due figure ſimili ſi riducon

ciascuna in tanti triangoli simili, de' quali le superficie sono (564) come i quadrati delle loro dimensioni omologhe; ed essendo (544) tutte le dimensioni omologhe di due figure simili proporzionali fra loro, segue che tutte le superficie di tutti i triangoli omologhi di due figure simili sono nella stessa ragione de' quadrati di due dimensioni omologhe qualunque delle due figure, e per conseguenza son tutte proporzionali fra loro. Ciò posto, è evidente che la superficie della prima figura è alla superficie della seconda figura, come la somma delle superficie de' triangoli ai quali la prima figura è stata ridotta, è alla somma delle superficie de' triangoli ai quali la seconda figura è stata ridotta; e per conseguenza come la superficie d'un triangolo qualunque della prima figura è alla superficie del triangolo omologo nella seconda; o finalmente come il quadrato d'una dimensione qualunque presa nella prima figura, al quadrato della dimensione omologa presa nella seconda.

574. Coroll. I. *Le superficie de' circoli son tra loro come i quadrati de' loro raggi, o de' loro diametri.*

575. Coroll. II. Quando dunque si vuol aumentare o diminuire la superficie d'un poligono, conservandone la sua figura, convien fare questa proporzione, per trovarne ciascun lato. *Come la superficie del poligono dato è alla superficie del poligono cercato, così il quadrato d'un de' lati del poligono dato è al quadrato del lato omologo cercato.* Ovvero avendo trovato un de' lati per questa proporzione, si avrà ciascun altro per quest'altra: *Come il lato del poligono dato è al suo lato omologo trovato per la prima proporzione, così ciascun altro lato del poligono dato è a ciascun lato omologo del poligono cercato.*

Si vuole, per esempio, far un parallelogrammo A di cui la superficie sia tripla, o sia come 3 a 1 rapporto a quella del parallelogrammo B, di cui il gran lato è di 6 piedi, e il piccolo di 4. Si farà dunque come 1 è a 3, così 36 quadrato di 6 piedi è a 108 qua-

adrato del gran lato del parallelogrammo A; la ra-
e è 10, 392 piedi. Indi come 6 è a 10, 392,
il 4 è a 6, 928; questo è il piccolo lato del pa-
lelogrammo A. Bisogna dar 10 piedi 4 pollici 8
ee al gran lato, e 6 piedi 11 pollici 1 linea $\frac{1}{2}$ al
colo lao, per aver il parallelogrammo A triplo in
erficie riguardo al parallelogrammo B.

176. Teor. XII. *Se in ciascun de' tre poligoni si-
i si prende una dimensione omologa, e se queste tre
ensioni trovansi tali, che essendo disposte in triangolo
sto triangolo sia rettangolo; la superficie del poligono,
ui la dimensione sarà l'ipotenusa di questo triango-
sarà uguale alla somma delle superficie de' due
i poligoni; e la superficie d'uno de' due poligoni,
ui la dimensione sarà uno de' lati del triangolo,
à ugual alla differenza tra la superficie del po-
no, di cui la dimensione sarà l'ipotenusa, e la
erficie dell'altro poligono.*

Dimostr. Le superficie di questi tre poligoni sono
loro come i quadrati de' tre lati del triangolo ret-
golo. Or il quadrato dell'ipotenusa è uguale (257)
somma de' due lati del quadrato del triangolo,
quadrato d'uno de' lati è ugual alla differenza tra
adrato dell'ipotenusa e il quadrato dell'altro la-
lo stesso è dunque delle superficie de' tre poli-

177. Oss. Quindi si trae un metodo facile per co-
re geometricamente de' poligoni, che sieno la som-
o la differenza di due altri poligoni simili. Per
la somma di due, bisogna disporre ad angolo ret-
no de' lati dell'uno col lato omologo dell'altro,
l'ipotenusa, e farne il lato omologo del poligo-
ercato. Per aver un poligono uguale alla diffe-
a fra due altri, sopra un lato qualunque del mag-
, descrivasi un semicircolo, si metta il lato omo-
del minore in maniera che una delle sue estre-
cada sopra un' estremità del diametro, e l'altra
nità sia in qualche punto della circonferenza.
uesto punto si tiri all'altra estremità del diame-
tro

tro una retta; questa sarà il lato omologo del poligono che si cerca.

Osservazioni sulla Quadratura del Circolo.

578. Benchè dalle proposizioni precedenti si conosca in qual rapporto le circonferenze e le superficie di due circoli sieno co' loro raggi o diametri, pure non si ha ancora potuto determinare precisamente il rapporto ch' è tra il diametro di un circolo e la sua circonferenza; così che data la grandezza di un diametro in numeri, non si può assegnar in numeri la grandezza precisa della sua circonferenza; nè in conseguenza quella della sua superficie, che è (368) il prodotto del semi-diametro per la semi-circonferenza. Questo è quel che si deve intendere lorchè si dice che non si è trovata ancora la *Quadratura del Circolo*; la parola *Quadratura* viene del quadrato, ch' è la comune misura d' ogni superficie (551).

579. Tutti gli sforzi de' più gran Matematici si son ridotti a dimostrare, ch' è impossibile trovarla per certe vie, ma ch' è facile approssimarvisi all' infinito. E la giustezza, con cui vi si è approssimato, è più che sufficiente per l' applicazione della Geometria alla pratica la più scrupolosa. Così che gli abili Geometri non riguardano ora la Quadratura assoluta del Circolo che come una cosa di pura curiosità, e stiman meglio impiegar il loro tempo a ricerche più utili; tanto più ch' è certissimo, che se il rapporto esatto del diametro del circolo alla sua circonferenza può esser espresso da numeri, questi numeri devon esser sì grandi, che non se ne potrebbe far uso ne' calcoli, e che bisognerebbe nella pratica appigliarsi ai numeri, de' quali ci serviamo attualmente. Ma la maggior parte di coloro, che non hanno che una superficialissima cognizione delle Matematiche, intraprendono con confidenza questo famoso Problema, senza neppur intender troppo bene lo stato della quistione, e accade spesso di persuadersi che l' han trovata.

580.

580. Si ſon trovati de' metodi per quadrar aſſoluta-
nte certi ſpazj rinchiuſi tra porzioni di circoli, o
che tra porzioni di circoli e linee rette. Per eſem-
, un antico Geometra Greco chiamato Ippocrate da
io ha provato, che *ſe ſopra l'ipotenuſa e ſu i lati
un triangolo rettangolo ſi deſcrivono de' ſemicirco-*
(fig. 45) *ſi avran due ſpazj curvilinei* AECGA,
FBHC, *de' quali la ſomma delle ſuperficie ſarà
ual a quella del triangolo rettangolo* ACB. Que-
due ſpazj ſi chiaman le *Lunule* d'Ippocrate.

Dimoſtr. Poichè (574) le ſuperficie de' circoli ſon
i loro come i quadrati de' loro diametri, le ſomme
lle loro ſuperficie ſon fra loro come le ſomme de'
adrati de' loro diametri. Or (527) il quadrato del
ametro AB è ugual alla ſomma de' quadrati de' dia-
etri AC, BC; dunque la ſuperficie del ſemicircolo
CHB è ugual alla ſomma delle ſuperficie de' ſemi-
rcoli AEC, CFB. Dunque ſe dal ſemicircolo ACHB
toglie la parte CHB comune col ſemicircolo CFB,
la parte AGC comune col ſemicircolo AEC, re-
ranno le *Lunule* CFBHC + AECGA uguali in
perficie al triangolo ABC.

Se il triangolo rettangolo foſſe iſoſcele, abbaſſando
a perpendicolare dall' angolo retto all' ipotenuſa,
la lo dividerà in due triangoli uguali, che ſarebbe-
ciaſcuno uguali alla loro Lunula.

Si poſſon ancora vedere differenti porzioni di circo-
quadrabili nelle *Memoires de l' Academie des
iences*, anni 1701, 1703. Vedi ancora nella fig.
B, uno ſpazio CDHAIBKC terminato da quarti
circolo, e ugual al quadrato CDAB.

58.. Il rapporto del diametro alla circonferenza
l circolo può eſſer a un dipreſſo determinato in
e maniere; o meccanicamente, paragonando (per
empio) al diametro di un circolo la lunghezza d'
filo, che foſſe ſtato piegato eſattamente ſulla ſua
rconferenza; o geometricamente, calcolando il con-
rno e le dimenſioni d' un poligono regolare d' un
andiſſimo numero di lati.

Si

Si concepiſca il circolo diviſo in 4 parti uguali, in 8, 16, 32, 64, 128 &c. e ſi concepiſca per queſti Punti delle diviſioni tirate le riſpettive corde e tangenti. Si avran due poligoni, uno circoſcritto, e l'altro iſcritto al circolo, tutti due compoſti di triangoli uguali. In queſti triangoli ſi poſſon aver le baſi, le quali per il poligono iſcritto ſon le corde del circolo, e per il poligono circoſcritto ſon le tangenti di eſſo circolo. Onde ſarà nota la ſomma di tutte le corde e di tutte le tangenti; cioè il perimetro del poligono iſcritto che di poco è minore della circonferenza del circolo, ed il perimetro del poligono circoſcritto di poco maggiore della circonferenza di eſſo circolo. Queſto difetto o eccesſo ſi può render tenue quanto ſi vuole, e riſtringer in anguſtiſſimi limiti. E' così che Archimede trovò queſto rapporto preſſo a poco come 7 a 22. Altri l'han poſto come 1 a 3, 13159265 &c. aggiungendo fin 127 decimali; il che fa un'approſſimazione quaſi infinita. Mezio l'ha determinato di 113 a 355, un altro di 1250 a 3927. Queſti ſon i più piccoli numeri che danno il rapporto più proſſimo al vero.

582. Onde dato il diametro d'un circolo, per calcolar il ſuo contorno, convien fare queſta regola di proporzione, 113:353::il diametro del circolo dato: ſua circonferenza. E ſe ſi vuol ſapere la ſuperficie di queſto circolo, biſogna (568) moltiplicar la metà del diametro per la metà della circonferenza così trovata.

Delle Figure Iſoperimetre.

583. *Figure Iſoperimetre* ſon quelle che hanno circonferenze uguali.

584. Teor. I. *Di tutti i poligoni regolari, il circolo ha la più grande ſuperficie.*

Dimoſtr. Suppongaſi, per eſempio, un circolo ed un ottagono regolare, i quali abbiano contorni uguali.

Il circolo ſarà al poligono come il raggio del circolo è all'apotema del poligono. Or l'apotema del poli-

gono è neceſſariamente più piccolo del raggio del olo; perchè ſe foſſe ugual o più grande, metten- allora il centro dell'ottagono ſu quello del circo- l'ottagono rinchiuderebbe intieramente il circo- e il contorno dell'ottagono ſarebbe più grande di llo del circolo; il che è contro la ſuppoſizione. Dunque di tutte le figure *Iſoperimetre* il circolo uello che ha maggior capacità.

85. Coroll. E ſiccome il circolo è una figura com- a d'infiniti lati e d'infiniti angoli, ſiegue che del- igure *Iſoperimetre* la più grande è quella che ha lati o angoli. Onde un pentagono ſarà maggiore n quadrato, un quadrato maggiore d'un trian- .

86. Teor. II. *Di due triangoli iſoperimetri aven- a ſteſſa baſe, de' quali uno è iſoſcele e l'altro eno, l'iſoſcele è più grande.* Ciò è baſtantemen- chiaro conſiderando che l'altezza del triangolo iſo- e è maggiore di quella dello ſcaleno.

87. Coroll. I. De' triangoli *iſoperimetri*, il trian- equilatero è più grande.

88. Coroll. II. Delle figure *iſoperimetre* che han- uno ſteſſo numero di lati, la più grande è quella è equilatera ed equiangola.

89. Coroll. III. Di tutti i parallelogrammi *iſope- etri* aventi la ſteſſa baſe, il maggiore ſarà il ret- olo; e gli altri ſaran tanto minori, quanto più i ſon i loro angoli.

90. Coroll. IV. Il maggiore di tutti i rettangoli erimetri ſarà il quadrato; e gli altri ſaran tanto ori, quanto più diſuguali ſaranno i loro lati.

91. Probl. *Fare che la circonferenza, la quale hiude un dato numero di miſure di terreno, ne hiuda un maggior numero.*

oluz. Sia, per eſempio un parallelogrammo, di uno de' lati ſia di 20 pertiche, e l'altro di 40; a di queſto parallelogrammo = 800 pertiche. Si bi ora queſto parallelogrammo in un quadrato del- eſſa circonferenza; cioè ſia ciaſcun lato = 30

per-

pertiche; la sua aja sarà di 900 pertiche; maggiore di quella del predetto parallelogrammo.

Della Geodesia, o Agrimensura.

592. La *Geodesia*, che significa divisione della terra, è propriamente l'arte di divider una figura qualunque in un certo numero di parti: arte importantissima per il partaggio e divisione de' terreni.

Questa operazione è sempre possibile o esattamente o almeno per approssimazione. Se la figura è rettilinea, si dividerà prima in triangoli, che avranno un vertice comune preso ove si voglia, o nel di dentro della figura, o nella circonferenza.

Si calcolerà poi co' metodi noti l'aja di ciascuno di questi triangoli, e per conseguenza si avrà il valore di ciascuna parte della superficie; e con ciò si conoscerà in qual maniera si ha da dividere la figura. Tutta la difficoltà si ridurrà in ogni caso a divider un triangolo in ragion data.

593. Probl. *Divider un Esagono per mezzo d'una linea tirata da uno de' suoi angoli, in due parti che sieno tra loro come m a n. Soluz.* 1.° Dividasi l'Esagono in 4 triangoli per linee tratte dal punto dato:

2.° Sia A l'aja dell'esagono, e pA, qA, rA, sA l'aja di ciascuno de' triangoli. Siccome le aje delle sue parti richieste devon esser mA e nA, suppongasi; che $\frac{p+q}{r+s}$ sia $> \frac{m}{n}$; siegue che bisognerà prendere nel triangolo qA una parte xA tale, che sia $\frac{p+q}{r+s}$ $\frac{-x}{+x} = \frac{m}{n}$; ovvero $(p+q)n-(r+s)m = mx+nx$; e per conseguenza $x = \frac{(p+q)n-(r+s)m}{m+n}$.

Si tratta ora dunque di divider il triangolo qA in due

: parti xA e $(q-x)$ A, che ſieno tra loro come
: a $q-x$; e per conſeguenza in ragion data, poi-
: x è già nota per l'equazione che ſi è trovata.
per far ciò, baſta divider il lato dell'Eſagono ch'
a baſe di queſto triangolo qA in due parti, che
1 tra loro come x è a $q-x$; operazione faciliſſi-
(538).

Il problema non avrebbe maggior difficoltà, ſe il
ito dato invece d'eſſer alla ſommità degli angoli,
ſe ſopra qualunque de' lati della figura.

594. Se la figura da dividerſi è curvilinea, ſi può
volta dividerla geometricamente in ragion data;
ciò è raro. Il metodo generale e più ſemplice
pratica conſiſte in divider la circonferenza della
ura in parti ſenſibilmente rettilinee; e riguardar
r conſeguenza la figura come rettilinea, e divider-
poi ſecondo il metodo precedente.

595. Se il punto per cui paſſa la linea, che deve
vider una figura qualunque in ragion data, è ſitua-
dentro o fuori della figura; allora è evidente, che
problema può aver molte ſoluzioni, almen in un
an numero di caſi, e talvolta può eſſer impoſſibile.
Se in una figura, per eſempio, regolare e d'un nu-
ero pari di lati, il punto dato è al centro, e ſi
iegga di dividerla in due parti uguali: il problema
indeterminato, poichè ogni linea retta tirata dal
ntro riſolverà il problema.

Se le due parti ſi voglion inuguali, il problema è
ipoſſibile; e ſe in queſt'ultimo caſo il punto è ſi-
ato fuori della figura regolare o irregolare che ſia,
problema ha ſempre due ſoluzioni, di cui l'una ſi
eguirà per una linea tirata a deſtra, e l'altra a ſi-
iſtra, tutte due partendo dal punto dato.

Or menando dal punto dato a tutti gli angoli del-
figura linee che (prolungate s'è neceſſario al di
entro della figura) dividon queſta figura in quadri-
teri (il che è ſempre poſſibile), ſi vede evidente-
ente, che ſiccome la quiſtione ſi è ridotta nel pri-
o caſo a divider un triangolo in ragion data per

una

una linea, che parta da un punto dato; così la quistione quì si riduce, dopo aver calcolato separatamente le superficie di tutti questi quadrilateri, a divider un di loro in ragion data per una linea tirata dal punto dato. Vi son dunque quì da trovar tre cose.

1.° Qual è il quadrilatero che si ha da dividere.

2.° Qual è la ragione, secondo cui si ha da dividerlo.

3.° Come si divide un quadrilatero in ragion data per una linea tirata da un punto dato, il quale si trova al concorso de' due lati del quadrilatero.

I due primi problemi si risolvono con un metodo esattamente simile a quello dato di sopra per la divisione della figura triangolare (593): Il terzo problema richiede un calcolo analitico differente.

596. Probl. *Divider un quadrilatero in ragion data per una linea tirata da un punto dato, il quale è al concorso di due lati del quadrilatero.*

Soluz. Si prolunghino i due lati del quadrilatero, che non concorrano al punto dato, e si avrà un triangolo esteriore al quadrilatero, il qual triangolo avrà uno degli altri lati del quadrilatero per base, e sarà col quadrilatero in ragion data di K a 1, essendo K un numero qualunque intiero o rotto.

Ciò posto, sieno pA, qA le due parti, nelle quali si ha da divider il quadrilatero. E' evidente che il quadrilatero totale sarà $pA+qA$, che il triangolo sarà $K(pA+qA)$, e che il triangolo unito al quadrilatero (il che formerà un nuovo triangolo, che avrà il quarto lato del quadrilatero per base) sarà $(K+1)(pA+qA)$. Si tratta dunque, tirando una linea pel punto dato, di divider questo triangolo in due parti, di cui l'una sia $K(pA+qA)+pA$, e l'altra qA; vale a dire, il problema si riduce a divider un triangolo noto e dato in due parti, le quali sieno fra loro come $K(p+q)+p$ è a q, per una linea, che passa per un punto dato fuori del triangolo. Or come ciò si risolva, si è detto (593).

597. Se il punto dato è posto nella figura, si tireranno

inno per queſto punto a tutti gli angoli delle linee erminate da una parte e l'altra a queſta figura; e on queſto mezzo ſi dividerà la figura in triangoli, e' quali ciaſcuno avrà il ſuo oppoſto alla ſommità. iò poſto, ſi cercheran le aje di quei triangoli, e ſi vran le aje di ciaſcuna parte della figura terminate a una delle linee tirate dal punto dato; linee, che ſi oſſon chiamare, benchè impropriamente, *diametri ella figura*. Conoſcendo queſte aje, ſi cercherà quali on i due diametri vicini che dividon la figura, l'uno n ragion maggiore, l'altro in ragion minore della ragion data; e con ciò ſi ſaprà che la linea cercata dee paſſare nell'angolo formato da queſti due diametri. ; ſiccome vi poſſon eſſere molti diametri vicini, che lividon così la figura, l'uno in maggiore l'altro in ninor ragion data, ſiegue che il problema avrà tante oluzioni poſſibili, quanti ſaranno tali diametri.

Ciò poſto; ſia A l'aja della figura totale; pA l'aja l'uno de' triangoli formato d'uno de' due diametri vicini; qA l'aja del triangolo oppoſto alla ſommità; nA l'aja della parte della figura ch'è a deſtra di queſti due triangoli; nA l'aja della parte ch'è a ſiniſtra: ſarà $mA + pA + nA + qA$ l'aja della figura intiera, così che ſarà $m + p + n + q = 1$; e ſi tratterà di menare tra i due diametri dati e dal punto dato ove queſti diametri ſi ſegano, una linea che divida i due triangoli oppoſti alla ſommità in due parti; cioè xA e $pA - xA$ da una parte, e dall'altra zA e $qA - zA$, e che ſien tali, che $mA + pA - xA + zA$ ſia a $nA + qA - zA + xA$ in ragion data, per eſempio, di s a 1. Si avrà dunque $m + p - x + z : n + q - z + x :: s : 1$; il che darà una prima equazione tra x e z. Or ſiccome i triangoli xA e zA ſon oppoſti alla ſommità, e ſon parte de' triangoli dati e anche oppoſti alla ſommità pA e qA, ſi troverà facilmente un'altra equazione generale tra x e z, poichè xA eſſendo nota, zA lo ſarà neceſſariamente; perciò ſi avran due equazioni in x e in z, per mezzo delle quali ſi troverà x,

nè si tratterà d'altro che di divider la base del triangolo pA in ragione di xap; il che darà la soluzione compita del problema.

598. Se si avesse da divider una figura in ragion data, per una linea che non passasse per un punto dato, ma che fosse parallela ad una linea; bisognerebbe divider prima la figura in trapezoidi, per linee tratte da tutti gli angoli di questa figura parallelamente alla linea data.

Indi non si avrebbe da far altro che divider in ragion data uno di questi trapezoidi; il che sarebbe facilissimo.

599. Gli esempj di questo metodo generale possono vedersi nel Clerc *Geometrie sur le Terrein*.

600. L'Agrimensura o sia l'Arpentaggio ha tre parti. La 1ª. consiste a prender le misure, e a far le osservazioni necessarie sul terreno stesso. La 2ª. a metter sulla carta queste misure e queste osservazioni. La 3ª. a trovar l'aja del terreno.

Riguardo alla prima parte, per le osservazioni degli angoli si adopra il Grafometro, la Tavoletta, la Bussola.

1°. *Grafometro* o *Semi-circolo* (fig. 135.). Il limbo di questo semi-circolo è diviso in 180 gradi, e talvolta suddiviso in minuti diagonalmente o altrimenti.

Questo limbo ha per sottendente il diametro FG, alle di cui estremità son elevate due *pinnule* o traguardi.

Nel centro è un perno ed uno stile con una regola mobile guarnita di due altri traguardi H, I. Per un angolo col semi circolo, si metta lo stromento in maniera che il raggio CG corrisponda direttamente e parallelamente ad un lato dell'angolo da misurarsi, e il centro C sulla sommità di esso angolo. Indi si giri la regola mobile HI sul suo centro verso l'altro lato dell'angolo, finchè per mezzo de' traguardi si possa scoprir un segno piantato all'estremità del lato. Allora il grado tagliato dalla regola sul limbo, è la quantità dell'angolo proposto.

In-

nvece del *Semicirculo* si usa un *Circolo* intiero di-
o in 360 gradi. Si serve anche d'un *quarto di Cir-*
o per le osservazioni più esatte.

3°. La *Tavoletta* (fig. 136.) consiste in un paralle-
rammo di legno, lungo circa 15 pollici, e largo
, circondato da una cornicetta; per mezzo di cui
ttacca un foglio di carta ben distesa, su cui si ti
a esattamente tutte le linee che abbisognano. So-
i ciascun lato della cornice, e verso il labro inter-
vi sono delle scale di pollici suddivise. Sopra un
o son disegnati i 360 gradi d'un circolo, incomin-
ndo da un centro di metallo ch'è nel mezzo della
avoletta; ogni grado è diviso in due parti uguali;
ad ogni decimo grado son segnati due numeri, de'
uali l'uno esprime il grado, e l'altro il suo comple-
ento a 360°, a fin di non esser obbligato di far la
ttrazione. Sull'altro lato son disegnati 180 gradi d'
n semicircolo incominciando da un centro di metal-
, ch'è nel mezzo della lunghezza della *Tavoletta*,
d un quarto distante dalla sua larghezza: ciascun gra-
o è diviso in due, e ad ogni decimo grado son se-
nati due numeri, cioè il grado col suo complemento
180°.

Da un lato della *Tavoletta* è una Bussola che ser-
ve a situare lo stromento; e nel mezzo gira una re-
gola guarnita di traguardi, e di scale.

Si usa parimenti una Tavoletta rotonda (fig. 137 in
al di sotto di cui son attaccati due piccioli sostegni),
b sostenenti un asse, sopra il quale è un telescopio *b*,
due lenti, rinchiuso in un tubo di rame per iscopr di
gli oggetti lontani, e un consimile telescopio è ire
a, *a*.

Il più semplice ed accurato stromento per prender
gli angoli, è quello dato da Tobia Mayer negli *Atti*
di Gottinga (fig. 139).

Consiste questo in due regole ben consistenti, lunghe
12 pollici, larghe 1: mobili intorno al mezzo con un
asse che le unisce: quella di sopra portando un can-
nocchiale con un sottil filo teso verticalmente nel fo-

co comune delle due lenti convesse. E' situato sopra un forte piede con un anello, onde possa girar e fermarsi con una vite.

Aperte queste regole comunque, si conoscerà l'angolo, prendendo col compasso l'intervallo *a b*, cioè la corda dell'angolo, la quale si trasferirà nella scala già preparata.

Per operare si procede così. Si aprano le regole comunque, come in *d C b*, e si assicuri della data quantità di quest' angolo. Poi si diriga il tutto (fermo l' angolo verso il primo oggetto A) finchè il filo lo tagli per mezzo. Poi fermata la regola inferiore, si rivolga pian piano (con una vite perpetua praticata sotto il perno C) all'oggetto B. Preso col compasso l' intervallo D b, si avrà la corda dell'angolo totale B C *b*, da cui sottraendo l'angolo noto A C *b*, resterà B C A cercato.

Per diminuire l'errore, se ve ne fosse, si ripeta l' operazione così. Ferma l'apertura tutta B C *b*, si collimi di nuovo in A; poi aprasi maggiormente lo stromento per mirar in B. Prendasi tutto questo nuovo angolo, e di nuovo con questa terza apertura si collimi in A, indi in B; e così di seguito, fin a far un intiero giro, o più giri se si vuole, notando solamente il numero delle operazioni.

In fine si ha un somma di gradi, che contiene tante volte l'angolo cercato quante operazioni si son fatte, più il primo angolo finto *d C b*. Dunque dalla somma totale si sottragga il valore di quest'angolo, il resto si divida per il numero delle operazioni: il quoziente sarà l'angolo cercato A C B molto più esatto.

Per l'esattezza convien badar ancora, che i punti sulle regole sieno sottilissimi, rotondi, ed in ugual distanza dal centro, specialmente i punti *a*, *b*. Si usi ancora un compasso di acutissima punta; e con prontezza d' occhio e di mano si sfuggirà l'errore, il quale, benchè piccolo, nelle gran distanze, riesce grave.

3°. La *Bussola* (fig. 138.) guarnita di due traguardi fa lo stesso ufficio del Grafometro, qualora si situi-

no

i traguardi direttamente ſopra un lato d'un angolo, che ſi vuol prendere, e poi ſi và a ſituarli ſopra l'altro lato di eſſo angolo. Si oſſervino gli angoli e farà l'Ago con queſti lati; ſe l'Ago della Buſſola ſi allontana dalla ſteſſa parte della meridiana di eſſa Buſſola, la differenza di queſti angoli ſarà il valore dell'angolo cercato; ſe poi l'Ago ſi allontana dalla ſua meridiana in ſenſo contrario, il valore dell'angolo richieſto ſarà la ſumma degli angoli oſſervati.

Per miſurar le diſtanze ſi adopra la Catena, e l'odometro.

1°. La *Catena* è una miſura compoſta di molti pezzi di fil di ferro ben groſſo, o anche di ottone, ricurvi alle due eſtremità. Ciaſcun pezzo è lungo un piede, compreſivi i piccioli anelli, che li uniſcon inſieme.

Queſte Catene ſon ordinariamente della lunghezza della pertica del luogo, ove ſi adoprano; ovvero ſon lunghe 4 o 5 pertiche, e fin a 8, o 10, ſe ſi han da fare grandi ſtazioni.

Queſte Catene ſon preferibili alle funi, che ſon ſoggette a molti inconvenienti, sì per l'umidità, come per la forza con cui ſi tendono.

2°. L'*Odometro* (fig. 140.) è uno ſtromento per miſurare ſpeditamente le diſtanze camminando.

Le ſue coſtruzione è tale che ſi attacca ad una ruota di Carro o di Carrozza, o ſi tira a mano, e miſura il cammino ſenza cagionar alcun imbarazzo. Conſiſte in una ruota di 2 piedi e $7\frac{1}{2}$ pollici di diametro, della quale la circonferenza è di circa 8 piedi e 3 pollici. Ad un'eſtremità dell'aſſe è un *pignone* del diametro di $\frac{3}{4}$ di pollice, diviſo in 8 denti che al gitar della ruota s'ingranano ne' denti d'un altro pignone C fiſſo all eſtremità d'una verga di ferro, così che queſta verga giri una volta mentre la ruota fa una rivoluzione. Queſta verga ch'è collocata lungo una ſcanalatura poſta ſul lato del ſoſtegno B di queſto ſtromento, ha all' altra ſua eſtremità un foro quadrato, in cui è poſta la punta *b* del piccolo cilindro *p*. Queſto cilindro è diſpoſto ſotto un quadrante all' eſtre-

mità del toſtegno Q in tal maniera che può muoverſi intorno al ſuo aſse. La ſua eſtremità *a* è fatta a vite perpetua, e s'ingrana in una ruota di 32 denti, che gli è perpendicolare. Quando lo ſtromento è tirato avanti, la ruota fa una rivoluzione ad ogni ſeſta pertica. Sull' aſſe di queſta ruota è un *pignone* di 6 denti, che incontra un'altra ruota di 60 denti, e le fa far un giro ogni 160 pertiche, o ſia ad ogni mezzo miglio. Queſt'ultima ruota ha un indice che può girare ſulla ſuperficie del quadrante, di cui il limbo eſteriore è diviſo in 160 parti corriſpondenti alle 160 pertiche, e così l'indice moſtra il numero delle pertiche fatte.

Di più ſull'aſſe di queſt'ultima ruota è un *pignone* di 20 denti, che s'ingranan in una terza ruota di 40 denti, e le fa far un giro di 320 pertiche o di un miglio. Sull'aſſe di queſta ruota è un pignone il quale s'ingrana in un'altra ruota di 72 denti, e le fa far un giro di 12 miglia. Queſta quarta ruota ha un altro indice, che corriſponde al limbo interiore del quadrante, diviſo in 12 parti per miglio, e ciaſcun miglio diviſo in metà, in quarti, e ſerve a moſtrare le rivoluzioni dell'altro indice, come a conoſcer il mezzo miglio, il miglio, e ſin a 12 miglia, che ſi ſono percorſe. Hiſt. Accad. 1742.

La 2ª. Parte dell' Agrimenſura ſi eſeguiſce colla Scala, e col Rapportatore.

1°. La *Scala* (fig. 142) è una linea, come A B, diviſa in un numero qualunque di parti uguali, una delle quali è ſuddiviſa in un più gran numero di parti uguali più piccole. Se una delle più gran diviſioni rappreſenta 10 d'una miſura qualunque, per eſempio, 10 miglia; ciaſcuna delle piccole diviſioni rappreſenterà un miglio &c.

2°. Il *Rapportatore* (fig. 141.) è un ſtromento con cui gli Agrimenſori riferiſcono e delineano ſulla carta gli angoli, che han preſo ſul terreno col Grafometro &c. Conſiſte in un limbo ſemicircolare B G A di metallo, o di oſſo, diviſo in 180 gradi, e termina-

to

to dal diametro A B, in mezzo di cui vi è un intacco o labro chiamato *il centro del rapportatore*.

Talvolta sul limbo del *rapportatore* vi son i numeri disegnanti gli angoli al centro de' poligoni regolari; onde rimpetto al numero 5 denotante il lato del pentagono si trova 72 ch' è l'angolo al centro del pentagono.

Per l'uso di questi principj e di questi stromenti vedi Trigonometria.

Finalmente riguardo alla 3ª. parte dell' Arpentaggio, ch' è di trovar l'aja del terreno, si eseguisce col ridurre i terreni in triangoli, in quadrati, in parallelogrammi, in trapezj, e se ne determina l'aja secondo i principj stabiliti.

Proprietà delle Superficie Piane, o de' Piani.

Si è supposto fin quì che tutte le linee e figure fossero poste sopra un piano, e gli spazj fra esse rinchiusi fossero descritti dal movimento de' punti o delle linee sopra un piano; ora si va a mostrar l'origine e la formazione geometrica del Piano.

601. Concepiscasi una retta AB (fig. 46) posta in aria, alla quale sia perpendicolare una retta indefinita ED. Si concepisca, che la retta AB giri sopra se stessa senza uscir dal suo luogo; si vedrà evidentemente che la retta ED descriverà una superficie piana CCCDDD; questa superficie sarà un piano perpendicolare alla linea AB.

Il Piano è dunque una superficie tale che tutti i punti d' una retta postale sopra, e girata per ogni verso, la toccano sempre.

602. Se le due linee non fossero perpendicolari l' una all' altra, la figura descritta non sarebbe un piano.

Per esempio, se si facesse girare sopra se stessa la retta MB (fig. 54) la quale fa in M l' angolo acuto NMB, è evidente che questa retta MB descriverà una superficie rotonda, convessa in punta da una parte, e

concava al di dentro, nella quale per conseguenza non sarà possibile situar in alcuna maniera delle rette, delle quali tutti i punti tocchino questa superficie.

603. Teor. I. *Una retta posta sopra un piano non può esser in parte su questo piano, e in parte elevata al di sopra, o abbassata al di sotto.*

604. Coroll. I. *Se due punti d'una retta son in un piano, la retta vi è tutta intiera.*

605. Coroll. II. *Uno stesso piano* A *non può esser in parte steso esattamente sopra un piano* B, *e in parte elevato al di sopra o abbassato al di sotto.*

Perchè allora una retta posta sopra il piano A potrebbe esser in parte sul piano B, e in parte elevata in su o bassata in giù; il che è impossibile.

606. Teor. II. *Tre punti che non son in linea retta, fissano, o determinano, la posizione d' un piano.*

Dimostr. Si metta un piano su quanti punti si voglia in linea retta, si vede facilmente che tutti questi punti formeranno al più un appoggio, intorno a cui questo piano potrà girare liberamente. Ma si metta un piano sopra tre punti che non son linea retta, questi tre punti formeranno un appoggio, su cui il piano non potrà più girare, ma sarà ritenuto in una posizione costante: Dunque tre punti, che non son in linea retta determinano la posizione d'un piano.

607. Coroll. *Un triangolo determina un piano e la sua posizione.*

608. Teor. III. *Una retta perpendicolare a un piano, è anche perpendicolare a tutte le rette, che poste su questo piano passano per l' estremità di questa retta.* Onde (fig. 46.) AE e perpendicolare su tutte le rette CED, CED &c.

609. Teor. IV. *Due rette perpendicolari o ugualmente inclinate per lo stesso verso sopra uno stesso piano, son parallele fra loro*; e reciprocamente.

610. Teor. V. *Due rette che s' intersecano, son tutte due in un medesimo piano*; o ch' è lo stesso, *si può sem-*

ſempre diſporre un piano in maniera, che due rette, che s'interſecano, vi ſieno diſteſe.

Dimoſtr. Il punto d' interſezione e un altro punto preſo ad arbitrio in ciaſcuna, ſon tre punti che non ſon in linea retta, e per conſeguenza (606) determinano la ſituazione d'un piano, ſu cui ciaſcuna di queſte due linee ha due punti. Dunque (604) queſte due linee ſon tutte intiere in queſto piano.

611. Teor. VI. *Se due rette che ſon in un piano, ſon tagliate da una terza fuori del punto di loro interſezione; queſta retta, che le taglia è anche nello ſteſſo piano.* Perchè ella ha due de' ſuoi punti in queſto piano, cioè i due punti d' interſezione colle due rette.

612. Teor. VII. *Tre punti non poſſon eſſer comuni a due piani differenti, ſe non ſon in linea retta.*

Dimoſtr. Tre punti che non ſon in linea retta determinan un piano. Or ſe tre punti non in linea retta poteſſero eſſer comuni a due piani differenti, la ſuperficie rinchiuſa tra queſti tre punti ſarebbe una parte comune a ciaſcuno de' due piani.

Dunque l'uno di queſti due piani avrebbe una delle ſue parti diſteſa eſattamente ſopra un altro piano, e il reſto in ſu o in giù; il che è impoſſibile (605).

613. Corol. *L' interſezione di due piani non può eſſere che una linea retta.* Perchè l'interſezione di due piani è una linea, di cui tutti i punti ſon comuni ai due piani.

614. Suppongaſi ora un piano immobile A; ſu cui ſia ſteſo un altro piano B terminato da linee rette, come un poligono regolare. Queſti due piani non avendo alcuna profondità, non poſſon formare, che un ſolo e ſteſſo piano. Ma ſe ſi fa girar il piano B ſopra uno de' ſuoi lati, che reſta ſempre ſituato ſul piano A, ſi concepiſce facilmente; 1.° che dal primo iſtante del movimento non rimarrà più altro di comune ai due piani, che la retta, ſulla quale il piano B girerà; 2.° che queſto piano paſſerà per tutti i gradi poſſibili d' in-

d'inclinazione, se si fa girare finche si posi sul piano A dall'altro lato: 3.° che diverrà perpendicolare al piano A, quando non sarà inclinato più da una parte che dall'altra: 4.° che i differenti gradi d'inclinazione saran misurati dal numero de' passi, che ciascun punto avrà descritto, dacchè avrà lasciato il suo punto corrispondente nel piano A. Questo sarà dunque un arco di circolo, di cui il centro sarà nella linea retta, che forma il piano di quest' arco nel girare. Or (602) una retta, che gira non può formar un piano, se ella non è perpendicolare alla linea su cui gira. Dunque *il centro dell' arco, che misura i gradi d'inclinazione d'un piano riguardo a un altro, è in una perpendicolare tirata da un punto qualunque di quest' arco alla linea dell' incontro de' due piani.* Se dunque si descrive un semicircolo, di cui il centro sia nella linea comune ai due piani, e di cui il piano sia perpendicolare alla loro linea d'intersezione, tutti i gradi di questo semicircolo misureranno tutte le inclinazioni possibili del piano mobile.

Si concepisce anche, che se una parte del piano mobile B avendo traversato il piano A, girasse sopra la linea d'intersezione, l'altra parte girerebbe nello stesso tempo, e farebbe col piano mobile gli stessi angoli dall'altra parte.

Donde segue in generale, che due piani, che s'inclinano l'uno sull' altro, hanno le stesse proprietà, che due rette, che s'inclinano l'una sull'altra. Dunque . . .

615. Teor. VIII. *Un piano, che incontra un altro piano, fa con lui due angoli retti, o uguali insieme a due retti.*

616. Teor. IX. *Nell' intersezione di due piani gli angoli opposti al vertice son uguali.*

617. Teor. X. *La somma degli angoli di quanti piani si voglia aventi una stessa linea d' intersezione, è di 360 gradi.*

618. Teor. XI. *Non vi è, che una linea che passando*

sando per un punto d'un piano, possa essergli perpendicolare; e da un punto fuori d'un piano non si può abbassargli, che una perpendicolare.

619. Teor. XII. *La distanza da un punto a un piano è una perpendicolare tirata dal punto sul piano.*

620. Teor. XIII. *Un piano, che taglia due o più piani paralleli fra loro, forma con loro degli angoli alterni esterni uguali, degli angoli alterni interni uguali, degli angoli interni supplementi l'uno dell'altro, e degli angoli esterni anche supplementi l'uno dell'altro*; e reciprocamente.

621. Teor. XIV. *Le intersezioni di due o più piani paralleli son rette parallele*. Perchè se non fossero parallele potrebbero incontrarsi; dunque i piani ove esse sono, si potrebbero incontrare; dunque questi piani non sarebbero paralleli.

CAPITOLO III.

De' Solidi, o della Stereometria.

622. SI chiama *Corpo* o *Solido* ogni quantità continua, e ogni spazio, che ha le tre dimensioni dell'estensione, cioè lunghezza, larghezza, e profondità.

Si consideran ordinariamente i solidi in due maniere: come prodotti dal movimento de' piani, nella stessa guisa, che il piano è formato dal movimento della linea retta, e che la linea è prodotta dal movimento del punto.

Seguendo questa idea, un solido non è altra cosa, che un composto di vestigi d'un piano, o piuttosto un ammasso di piani d'una grossezza infinitamente piccola, de' quali il numero infinito è ugual al numero de' punti della linea, che misura il cammino del piano, che ha formato il solido; ciascuno di questi piani si chiama uno degli *Elementi* del solido.

623. Questi solidi son prodotti o da un movimento rettilineo d'un piano parallelamente a se stesso, o dal-

la

la rivoluzione circolare d'una figura sopra una retta immobile, che si chiama l'*asse* del solido.

624. 11.° Si può anche riguardar un solido come composto d'altri solidi simili, o no, applicati gli uni incontro agli altri, e de' quali si suppone ordinariamente, che due delle loro tre dimensioni sien infinitamente piccole: queste specie di piccoli solidi si chiamano anche *Elementi* del solido ch'essi compongono.

625. I solidi, de' quali le facce son piane, chiamansi in generale *Poliedri*, e prendon il nome di *Tetraedro*, *Pentaedro*, *Esacdro &c.* quando hanno 4, 5, 6 &c. facce. Si dicon *Poliedri regolari*, se i loro angoli son tutti uguali, e se le loro facce son poligoni regolari uguali, e della stessa specie.

626. Se s'immagina un piano, che passi a traverso d'un solido, come per tagliarlo in due parti, la figura formata sulla superficie del solido dal rincontro delle sue facce col piano secante, si chiama *sezione* di questo solido. E' chiaro che questa sezione è un Poligono, che ha tanti lati quante facce ha incontrato il piano secante.

Origine e proprietà de' solidi prodotti da un movimento rettilineo.

627. Sia (fig. 47, 48) una figura piana qualunque ABCDE, che posta sopra un piano scorra parallelamente a se stessa lungo la retta MN, e si fermi in FGHIK. Questa figura avrà prodotto colle sue tracce un solido, che si chiama *Prisma*.

In questo movimento è chiaro, 1.° i lati AB, BC, CD &c. avran descritto i parallelogrammi ABGF, BCHG, CDIH &c. 2.° che ciascuna traccia o elemento del Prisma, e ciascuna base, son tanti poligoni uguali, e similmente posti. Dunque in generale . . .

Il Prisma è un corpo terminato da basi, che sono figure uguali e parallele, e da facce che sono parallelogrammi.

628. Il Prisma è *retto* o *obliquo*, secondo che la

linea

ea MN, lungo di cui si muove il poligono genera-
e, è perpendicolare o inclinata al piano colla base
l Prisma.

629. La retta PQ (fig. 48), o Pq (fig. 47) che
ssa per il mezzo di tutti gli elementi del solido,
chiama l'*asse* del Prisma; quest'asse è ugual e pa-
llelo a tutti i lati AF, BG, CH &c. del prisma,
oichè rappresenta la traccia del centro del Poligono
eneratore.

630. Una perpendicolare PQ (fig. 47) tirata da un
e' punti qualunque d'una delle basi sul piano dell'al-
ra base (prolungato s'è necessario) si chiama l'al-
:ezza del Prisma.

631. Coroll. I. *L'altezza d'un Prisma retto è ugual al suo asse; e l'altezza d'un Prisma obliquo è tanto più piccola dell'asse, quanto questo solido è più inclinato al piano della sua base.*

632. Coroll. II. *L'altezza d'un solido qualunque composto d'elementi che son piani paralleli, esprime il numero di questi elementi.* Perche ella esprime la distanza de' piani delle due estremità de solido: Or non possono esservi tra questi due piani più elementi di quel che non vi son punti nella linea, che misura la loro distanza. Dunque l'altezza d'un solido esprime il numero de' suoi elementi, lorchè si possono prender questi elementi per piani paralleli.

633. Il Prisma prende differenti nomi secondo la specie del poligono generatore. Se questo è un triangolo, il Prisma si chiama *Triangolare*; s'è un Quadrilatero, dicesi *Quadrangolare*, s'è un Pentagono, si chiama *Pentagonale &c.* s'è un circolo, e se il suo movimento si fa per una linea perpendicolare al piano di questo circolo, il Prisma si chiama un *Cilindro* retto (fig. 49).

634. Se il Poligono generatore del Prisma è un Parallelogrammo, il Prisma si chiama *Parallelopipedo*: se il Parallelogrammo è un rettangolo, e se il Prisma prodotto da questo rettangolo è retto, si chiama *Parallelopipedo rettangolo.* (fig. 50). Se il Poligono gene-

generatore è un quadrato, e se il prisma formato da questo quadrato è retto, e ha il suo asse ugual al lato del quadrato, si chiama *Cubo*, o *Esaedro regolare* (fig. 51.).

635. Sia una figura piana qualunque (fig. 52, 53) ABCDE, che posta sopra un piano si avanzi per una linea qualunque MN (perpendicolare o inclinata al piano della figura) così che a ciascun lato della figura decresca in progressione Aritmetica. Per esempio, che dopo il primo passo infinitamente piccolo ciascun lato perda $\frac{1}{\infty}$ della sua lunghezza; dopo il secondo passo ciascun lato perda ancora $\frac{1}{\infty}$ della sua prima lunghezza &c. in maniera che la figura essendo arrivata in M, non abbia più che lati infinitamente piccoli, o sia ridotta a non esser più che un punto. Il Solido così formato si chiama *Piramide*; il punto M dicesi la *sommità*, e il Poligono ABCDE è la base.

E' chiaro che in questa formazione ciascun lato AB, BC, CD &c. della figura, avrà descritto i triangoli ABM, BCM, CDM &c. poichè (558) lo spazio racchiuso in un triangolo, è ripieno d'un infinità di parallele, che vanno in progression Aritmetica da zero, ch'è la sommità del triangolo, fin alla sua base. Dunque . . . .

636. 1.° *Una Piramide è un solido, che ha per base un poligono, e che è terminato da facce triangolari.*

6,7. 2.° La linea NM, che va dalla sommità M al punto N del mezzo della base, si chiama l'asse della Piramide; la sua altezza (fig. 52) è la perpendicolare MN, o (fig. 53) M*n*; la qual altezza è ugual o più corta del suo asse, secondo che la Piramide è retta o inclinata.

638. La Piramide prende anche differenti nomi secondo la specie del Poligono della sua base. Se questo è un triangolo, la Piramide si chiama *triangolare*; se questo è un triangolo equilatero, e se l'asse essendo perpendicolare le facce son anche triangoli equilateri, la Piramide si chiama *regolare*, o *Tetraedro regola-*

re,

Se è un Quadrilatero, la Piramide dicesi *Quadrangolare* o a quattro facce; se è un Pentagono, ella si chiama *Pentagonale &c.*; finalmente s'è un circolo; e se l'asse è perpendicolare al piano in questo circolo, si chiama *Cono retto*; e se l'asse è inclinato al piano, si chiama *Conoide*.

639. Se nella formazione della Piramide si concepisce, che il Poligono generatore si fermi prima d'esser pervenuto infinitamente piccolo, la Piramide o il Cono formati in questa maniera, si chiaman *Piramidi* o *Coni troncati* (fig. 55), perchè possono riguardarsi come Piramidi o Coni, di cui siasi tagliata una parte per mezzo d'un piano parallelo alla base.

Origine e proprietà de' Solidi formati da un movimento circolare.

640. 1.° Si può concepir il Cilindro retto formato da un movimento circolare in due maniere; o col far girar un rettangolo MABN (fig. 49) sopra uno de' suoi lati immobili MN, il quale divenga l'asse del Cilindro; o supponendo due circoli immobili AC, DB uguali e paralleli, de' quali i centri M, N, sieno in una stessa retta perpendicolare ai loro piani, e facendo girare una retta AB intorno alla circonferenza di questi circoli.

641. Si può finalmente concepire il Cilindro formato da un fascio di prismi retti infinitamente delicati, di basi uguali, e della stessa altezza, e rinchiusi in circoli uguali, de' quali riempian esattamente lo spazio, e de' quali il numero sia ugual a quello de' punti della superficie di questi circoli.

642. 2°. Si può concepir il Cono retto formato da un movimento circolare, 1°. facendo girar un triangolo (54) MNB sopra uno de' suoi lati MN che sarà l'asse del Cono; l'ipotenusa MB descriverà la superficie, e l'altro lato NB sarà il raggio della base. 2°. Supponendo che all'estremità M d'una retta MN elevata perpendicolarmente sul piano d'un circolo BD, e pas-

e passando pel suo centro, sia fissata all' estremità M d'un'altra retta MB, e che l'altra punta B giri intorno al circolo BD. Donde si vede, *che tutti i punti formanti il contorno della base del Cono retto son ad ugual distanza dalla sua sommità* M.

643. Il Cono troncato è formato dal movimento d'un Trapezio ABND (fig. 55) di cui due lati AB, ND son inuguali, paralleli fra loro, e perpendicolari alla retta AN, su cui questo Trapezio gira.

644. 3°. Se si fa far una rivoluzione a un semicircolo sopra il suo diametro, il solido prodotto da questo movimento, si chiama un *Globo* o una *Sfera*.

Dunque *la Sfera è un solido, di cui tutti i punti della superficie presi in qualunque maniera, son ugualmente lontani da un punto al di dentro, che n'è il centro.*

645. Se s'immagini (fig. 64. n°. 2.) che per tutti i punti consecutivi P, P &c. che compongon il diametro S*s* del semi-circolo generatore, s'abbian fatto passare delle perpendicolari MP, MP &c. terminate alla circonferenza, è chiaro che pel movimento del semi-circolo generatore SM*s* sul diametro S*s*, tutte queste perpendicolari saranno i raggi di tanti circoli quanti se ne posson contenere tra S e *s*; e si posson riguardare tutti questi circoli come Cilindri infinitamente sottili di ugual grossezza, che formano gli elementi della Sfera, di cui i semidiametri crescon e decrescono nella stessa ragione di tutte le corde parallele M*m*, M*m*, che si posson tirare consecutivamente in un circolo.

Ma se si riguarda il semi-circolo generatore come una metà di Poligono regolare (58) d'un'infinità di lati, e si suppongon abbassate da tutti i suoi angoli consecutivi le rette DT, EX, GC &c, perpendicolari al diametro di rotazione *d*L; è evidente che queste rette prese consecutivamente due a due formano de' trapezj *d*FDT, TDEX, XEGC &c. e per conseguenza nel movimento di rotazione del semicircolo *d*GL sul diametro *d*L, questi trapezj formano tanti Coni troncati OFDB, BDEA, AEGP &c.

Si

Si può dunque in queſta ipoteſi riguardar la Sfera come ›mpoſta d'una infinità di Coni troncati d'una groſ-:zza inuguale, ma infinitamente piccola.

Finalmente ſe ſi ſuppongono deſcritti al di dentro el ſemi-circolo generatore tanti ſemi circoli concen-rici, quanti punti vi ſono nel raggio di queſto circo-o; è chiaro che in virtù di queſto movimento di ro-azione, tutti queſti ſemi-circoli formeranno tante ſu-›erficie ſferiche. Dunque ſi può in queſta ipoteſi ri-guardar la Sfera come compoſta d'un'infinità di ſu-perficie d'una groſsezza infinitamente piccola, ma u-guale, e incaſsate le une entro l'altre.

646. Si chiama *Aſſe* della Sfera ogni retta che paſ-ſando pel centro, è terminata da una parte e l'altra alla ſua ſuperficie.

647. Dunque *tutti gli Aſſi della Sfera ſon uguali fra loro*; perchè ſono la ſomma di due raggi.

648. Formata così la Sfera, è chiaro che a cauſa del-la regolarità della ſua figura, *ſi può prendere uno de' ſuoi aſſi qualunque per l'aſſe del ſemi circolo gene-ratore*. Donde ſiegue:

649. 1°. *Che in qualunque maniera ſi tagli con un piano la Sfera, la ſezione ſarà un circolo*. Poichè ſe pel centro della Sfera ſi fa paſſar un aſſe perpen-dicolar al piano di queſta ſezione, ſi potrà (648) pren-der queſt'aſſe pel diametro del ſemi-circolo generato-re; e per conſeguenza il piano ſecante incontrando il diametro perpendicolarmente, taglierà la sfera in uno de' ſuoi elementi, che ſon tutti circoli (645).

650. 2.° *Che le ſezioni della ſfera per un piano qualunque, ſon circoli tanto più grandi, quanto il piano ſecante paſſa più vicino al centro della ſfera*; e reciprocamente; così che *la più gran ſezione poſ-ſibile è quella che paſſa pel centro*.

Poichè queſte ſezioni hanno per diametri corde, che ſono (417) tanto più grandi, quanto più ſon vi-cine al centro, e delle quali la maggiore è il diame-tro ſteſſo.

651. 3.° Perciò ſi chiama *gran Circolo della Sfera*

quello che ha lo stesso centro della Sfera; e si chiama *piccolo Circolo della sfera* quello, di cui il piano non passa pel centro della sfera.

652. 4.° Finalmente si può considerar la sfera come composta d'un' infinità di Piramidi uguali infinitamente sottili, delle quali ciascun de' punti della superficie della Sfera è la base, e delle quali tutte le sommità concorrono al centro della sfera.

Si può supporre a causa della regolarità della figura della sfera, che ciascuno di questi punti, che servon di base, sieno Poligoni regolari infinitamente piccoli, e uguali fra loro; e che perciò sieno o triangoli equilateri, o quadrati, o esagoni; perchè non vi sono che queste tre sorti di poligoni regolari, che possan aver due a due i loro lati comuni senza lasciare spazio vuoto.

De' Poliedri, e de' loro Rapporti.

653. Chiamasi *Angolo Solido* un angolo formato dal concorso delle sommità di più angoli piani, i quali essendo inclinati gli uni sugli altri si riuniscono due a due co loro lati per formar una sola punta.

Tali sono le sommità delle Piramidi, le punte de' Prismi &c. Diconsi *angoli solidi uguali* quelli che son composti d' uno stesso numero d' angoli piani, de' quali gli omologhi son uguali e similmente posti.

La Sfera serve di misura ad un angolo solido, come il Circolo ad un angolo piano. Bisogna dunque concepire, che la sommità d'un angolo solido sia al centro d'una sfera; allora ciascuno degli angoli piani componenti l'angolo solido è nel piano d'uno de' gran cerchi di questa sfera (651). Ciascun angolo piano ha dunque per misura l' arco (di questo gran circolo) che si trova intercetto tra i suoi lati, e di cui la corda serve di base a quest'angolo, così che la misura dell'angolo solido è la somma de' gradi sottesi da queste corde.

Poichè ciascuno degli angoli piani, che forman un ango-

o ſolido, deve aver un lato comune coll' angolo che gli è contiguo, è chiaro che gli archi de' circoli, che miſurano queſti angoli piani, ſi ter- no gli uni gli altri, come le corde, le quali for- in conſeguenza una ſpecie di Poligono chiu- che ſerve di baſe all' angolo ſolido. Donde

. . . . .

. Teor. I. *Ci voglion almeno tre angoli piani ormar un angolo ſolido*. Poichè il più ſemplice oligoni, che queſt' angolo ſolido poſſa aver per è un triangolo.

. Teor. II. *Di tutti gli angoli piani formanti un ſolido, il più grande deve eſſer minore della a di tutti gli altri.*

chè ſe ſi trovaſſe ugual alla ſomma degli altri, della ſfera, che lo miſurerebbe, ſarebbe ugual omma degli archi che miſurerebbero tutti gli al- goli. Dunque tutti queſti altri archi non potreb- eſſer l'uno contiguo all'altro, ed unirſi alle eſtre- del più grand'arco, ſenza eſſer eſattamente diſteſi di eſſo, e per conſeguenza tutti queſti archi e le orde ſarebbero in un ſolo e ſteſſo piano; il che uò convenir alla miſura d'un angolo ſolido.

gio ſarebbe ancora, ſe ſi voleſſe, che il più grand' piano eccedeſſe la ſomma di tutti gli altri; allora ſarebbe impoſſibile, che tutti gli archi contigui.

. Teor. III. *La ſomma di tutti gli angoli piani nenti un angolo ſolido è ſempre minore di 360 purchè queſt angolo ſolido non ſia compoſto di ſalienti e rientranti.*

i prendono 4 angoli piani ciaſcuno di 90 gradi, rmeranno mai un angolo ſolido, ſe non quando rende uno rientrante. Perchè ſe un angolo ſo- leſſe 360 gradi, gli angoli piani, che lo forma- appoggerebbero ſulla circonferenza intiera d'un ircolo della ſfera, cioè d'un circolo, che avreb- centro il centro ſteſſo della ſfera, poichè ſi il valore d'un angolo ſolido col concepire, che

la ſua ſommità ſia al centro della sfera, che gli ſerve di miſura. Non vi è gran circolo, che non ſia nel piano del centro della sfera; dunque la ſommità dell'angolo ſolido ſarebbe nel piano della circonferenza, che lo miſura. Ma ciò è impoſſibile; dunque è impoſſibile che la ſomma di tutti gli angoli piani componenti un angolo ſolido non ſia minore di 360°, purchè queſt'angolo non ſia compoſto di angoli ſalienti e rientranti.

657. Teor. IV. *Due angoli ſolidi* A, a *compoſti ciaſcuno di due angoli piani, ſon uguali fra loro, ſe ſi ſa, che due angoli piani* B, D *del primo angolo ſolido* A *ſon uguali ciaſcuno a due angoli piani* b, d, *dell' angolo ſolido* a, *e che l'inclinazione de' piani* B, D *è ugual all' inclinazione de' piani* b, d.

Dimoſtr. Supponendo uguale la lunghezza di tutti i lati di queſti angoli piani (com'ella è quando termina alla ſuperficie d'una sfera), è chiaro, che per l'uguaglianza dell' inclinazione, e per l' uguaglianza degli angoli corriſpondenti, ſi può concepire, che i due angoli piani B, D (conſiderati indipendentemente dal terzo che compiſce l'angolo ſolido) fanno una ſpecie d'angolo cavo, in cui ſi può incaſſare eſattamente l'angolo cavo formato dagli angoli piani *b*, *d*, poichè tutto è uguale da una parte e l'altra. Dunque ciaſcun cavo non può eſſer coverto, che da un angolo piano uguale da una e l'altra parte; il che fa vedere (653) che i due angoli ſolidi A, *a* ſon uguali.

658. Oſſerv. Può dimoſtrarſi ancora, che ſe due angoli ſolidi ſon compoſti di quattro angoli piani, e ſe ſi è ſicuro d' una perfetta uguaglianza da una parte e l' altra in tre di queſti angoli piani, e nella loro inclinazione ſcambievole, il quarto angolo piano deve eſſer uguale da una parte e l' altra, e i due angoli ſolidi, compoſti ciaſcuno di cinque, ſei &c. angoli piani.

659. Teor. V. *Un Poliedro ha d'aver almeno quattro facce.* Perchè ci voglion almeno tre piani per formar uno degli angoli ſolidi di un Poliedro; or un angolo così formato laſcia un vuoto in dentro, dunque

ci

uol ancora almen un altro piano per chiuder il
:o, e affin che il Poliedro abbia le ſue tre dimen-

ɔo. Teor. VI. *Un Poliedro deve aver almeno quat-*
angoli. Perchè il vuoto che laſcian tre piani for-
ti un angolo ſolido, è terminato da una figura che
ılmeno tre angoli; or non ſi poſſon formare gli
ɔli di queſta figura, ſenza formar altrettanti an-
; dunque un Poliedro deve aver almeno quattr'
li.

ɔ1. Teor. VII. *Non poſſon eſſervi che cinque Po-*
i regolari; cioè tre di cui le facce ſien triangoli
lateri; uno, le cui facce ſien quadrati; e uno,
ui facce ſieno Pentagoni regolari.

ichè (654) volendoci almeno tre angoli piani per
ar un angolo ſolido, nè potendo un angolo ſoli-
ſſere di 360 gradi (656), è chiaro che non vi ſo-
he cinque caſi, nei quali ſi poſſa far un angolo
o con piani di Poligoni regolari. 1.° L'angolo d'
riangolo equilatero eſſendo di 60 gradi, tre uni-
ſieme fanno un angolo ſolido di 180 gradi; e per
eguenza quattro triangoli di queſta ſpecie poſſon
ın *Tetraedro*. 2.° Quattro triangoli equilateri uni-
ſieme, poſſon far un angolo ſolido di 240 gradi,
rmar un corpo regolare di otto facce, chiamato
edro. 3.° Cinque di queſti triangoli uniti inſieme,
n formar un angolo di 300°, e per conſeguenza
: può comporre un corpo regolare di 20 facce
› *Icoſaedro*. 4.° Ciaſcun angolo d'un quadrato va-
› 90°, tre uniti inſieme faranno un angolo ſolido
'0°, e in conſeguenza ſe ne potrà comporre un
› regolare di ſei facce detto *Eſeadro*; ma quat-
li queſti angoli faranno 360°, onde non poſſon far
ngolo ſolido. 5.° Ciaſcun angolo del Pentagono
lare valendo 108°, tre uniti inſieme potran far
ngolo ſolido di 324°; e ſe ne potrà far un corpo
lare di dodici facce, chiamato *Dodecaedro*; ma ſe
ıiſcon quattro di queſti angoli, ſi avranno 432°,
lo ſolido impoſſibile. Finalmente l' angolo dell'

Esagono regolare essendo di 120°, se se ne uniscon tre insieme, la somma 360° mostra che non si possono far angoli solidi, nè in conseguenza corpi regolari con Esagoni, molto meno con *Ettagoni*, *Ottagoni* &c. Dunque non possono darsi che cinque corpi regolari.

Per maggior intelligenza di ciò, giova farsi col cartone o con altra materia Poligoni regolari, per costruire questi Poliedri.

Della Comparazione de' Solidi.

662. Si chiaman *Solidi simili* quelli, de' quali tutti gli angoli omologhi son uguali, e de' quali le facce sono figure simili; onde (540) possono ridursi in triangoli simili, ed hanno tutte le loro dimensioni omologhe proporzionali.

663. Coroll. *Due Poliedri regolari qualunque della stessa specie, e in conseguenza due sfere, sono solidi simili.*

664. Per aver un'idea chiara di due Solidi simili, convien concepirli come composti tutti due d'un ugual numero di piani simili e similmente posti, così che la loro inuguaglianza consista in ciò, che ciascun piano elementare del più gran solido ha una superficie ed una profondità più grande della superficie e della profondità del piano omologo del più piccolo solido, ma che questi piani omologhi conservino sempre lo stesso rapporto. Per esempio, due Sfere sono due Solidi simili; 1.° perchè elle son composte di piani circolari, i quali sono figure simili, poichè sono Poligoni simetrici e regolari (506) d'un medesimo numero infinito di lati. 2.° Questi piani sono similmente posti in ciascuna sfera; perchè son tutti posti perpendicolarmente all'asse, che passa per i loro centri, e son disposti in maniera che i loro diametri seguitan il rapporto di tutte le corde successive del circolo. 3.° Son in ugual numero in ciascuna sfera; perchè tutti i circoli immaginabili non hanno che uno stesso numero di lati infinitamente piccoli, e per conseguenza han ciascu-

o ugual numero di corde ; perchè le corde ſon
: rette che uniſcon tutti gli angoli o tutti i lati,
nella ſteſſa maniera, e a ugual diſtanza dall' una
altra parte dell' aſſe.

5. La differenza tra una grande e una picciola S fe-
onſiſte: 1.° che ciaſcun diametro di tutti i pia ni
entari della Sfera grande è maggiore (ma in un
orto coſtante) di quello di ciaſcun piano omolo-
ella piccola. 2.° Che i lati de' piani elementari
Sfera grande eſſendo (benchè infinitamente pic-
) maggiori di quelli della Sfera piccola ; le cor-
e li uniſcono da una parte e l'altra dell' aſse,
men riſtrette, e in conſeguenza la groſsezza de"
, ch'è miſurata dall'intervalio di queſte corde,
ggiore nella Sfera grande che nella piccola, il tut-
lla ſteſsa proporzione.

6. Secondo l'idea data di due Solidi ſimili, è evi-
: che *non vi è punto preſo in una delle facce
di queſti ſolidi, che non abbia il ſuo punto cor-
ndente, e ſimilmente poſto nella faccia omologa
altro ſolido* (540). Si deve anche conchiudere,
*on vi è punto nell'interiore di queſti ſolidi, che
bbia il ſuo punto corriſpondente, o ſimilmente
nell' altro ;* poichè queſti due ſolidi ſon compoſti
ſteſso numero d'elementi, di cui i corriſponden-
ciaſcun ſolido ſono figure ſimili, e ſimilmente
ate.

7. Teor. I. *Avendo tirato* (fig. 57.) *a traver-
in ſolido qualunque una retta* PQ *che termini
punti qualunque* P, Q *delle facce* KG, EG;
a paſſar a traverſo d un ſolido ſimile una ret-
(fig. 56) *che termini ai due altri punti* p,
*lmente poſti i queſte due rette ſaranno dimen-
mologhe de' ſuo ſolidi* ; o ch è lo ſteſso, *ſaran
ro come un lato qualunque preſo nel primo ſo-
al lato omologo preſo nel ſecondo*. Per eſempio,
à PQ: *pq* :: GA : : *ga*.

noſtr. Se per due angoli omologhi qualunque D,
per i punti P, Q; *p*, *q* s' imagini un piano,

che tagli ciascun solido; i triangoli DQP, *dqp* giacenti sul piano di queste sezioni saran simili. Perchè 1.° i punti similmente posti Q, *q*; P, *p* danno questa proporzione (543) DP: *dp* :: DQ: *dq*, e inoltre fanno gli angoli PDF, FDQ uguali agli angoli corrispondenti *pdf*, *fdq*. 2.° per la rassomiglianza de' solidi, le facce FA, FC son inclinate tra loro quanto lo sono le facce corrispondenti *fa*, *fc*. Dunque (657) l'angolo solido formato in D dagli angoli piani PDF; FDQ, PDQ è ugual all'angolo solido formato in *d* dagli angoli piani corrispondenti. Dunque l'angolo piano QDF = *qdf*, e i triangoli QDF, *qdf* han ciascuno un angolo uguale rinchiuso tra due lati omologhi proporzionali; dunque (524) questi triangoli son simili, e si ha QP : *qp* :: DQ : *dq* :: AG : *ag*. &c.

668. Corol. Tutti i punti componenti la superficie del Triangolo QDF sono nello stesso numero e similmente posti riguardo a quelli che compongono la superficie del triangolo *qdf*; donde siegue che i piani secanti, ove son situati i triangoli PDQ, *pdq*, passano per punti che son tutti similmente posti ne'due solidi e in conseguenza le parti de'due solidi che son tolte da questi piani secanti, son due porzioni simili di questi solidi, come lo son anche le due parti che restano; così che si può dire che *se per tre punti omologhi presi (non in linea retta) sulla superficie di due solidi simili, si fa passar un piano a traverso a ciascun solido, ciascun solido sarà tagliato in due parti, di cui gli omologhi saranno anche solidi simili.*

669. Teor. II. *Se dagli angoli omologhi qualunque* C, c *si tirano su i piani omologhi vicini o opposti, prolungati o no, le perpendicolari* Cr, cr, *che misurano l'altezza degli angoli* C, c *su questi piani; elle saranno proporzionali ai lati, o alle linee omologhe qualunque.* Per esempio, CR : *cr* :: CE : *ce* :: PQ : *pq* &c.

Dimostr. Per i punti, E, *e* (ove terminan i lati CE, *ce* sopra i piani delle facce o delle basi FH, *fb*)

ſi tirino ai punti R, *r*, ove terminano le perpendicolari CR, *cr* ſu gli ſteſſi piani prolungati, e tte ER, *er* le quali ſaran diſteſe ſu queſti medepiani prolungati, e ſaranno (608) perpendicolale rette CR, *cr*. I triangoli CER, *cer* ſaran ue rettangoli in R, *r*, e ſimili fra loro, a cauella raſsomiglianza de' ſolidi che rendon i lati oghi CE, *ce* ugualmente inclinati ſu i piani omoi GHEF, *ghef*, e per conſeguenza gli angoli R, *cer* uguali fra loro. Dunque CR : *cr* :: C *ce* :: PQ : *pq*, &c.

o. Oſserv. Dunque la proprietà generale de' ſolimili conſiſte in aver tutte le loro dimenſioni omoe proporzionali fra loro.

Della Miſura delle Superficie di ciaſcuna ſpecie di Solidi.

71. Si chiamerà d'ora avanti *la Superficie d' un do* quella delle ſue facce ſolamente ſenza comndervi la di lui baſe, ſe ne ha. E ſi chiamerà *ſuficie totale d' un ſolido* quella delle ſue facce e e ſue baſi inſieme.

72. Teor. I. *La ſuperficie totale d'un ſolido, oun iedro qualunque, è ugual alla ſomma delle ſuficie delle figure, che compongono le ſue facce e ue baſi.*

73. Teor. II. *La ſuperficie d'un Priſma qualun- è ugual al prodotto d'uno de' ſuoi lati qualun- moltiplicato pel contorno del Priſma miſurato in piano perpendicolare a queſto lato.*

Dim. Tutti i lati d'un Priſma ſon linee rette uali e parallele.

Se dunque per un punto preſo ad arbitrio ſopra un lati del priſma, s'immagini un piano, che tagli il ſma perpendicolarmente a queſto lato, queſto piano glierà anche (397) tutti gli altri lati perpendicomente, e la ſezione ſarà un Poligono di cui ciaſcun o ſarà perpendicolare ai due lati paralleli terminanciaſcuna faccia del Priſma. Dunque (554) la ſurficie di ciaſcuna faccia ſarà ugual al prodotto di ciaſcun

ſcun lato della ſezione per un de' lati qualunque del Priſma (poichè ſon tutti uguali): Dunque la ſuperficie del Priſma ſarà ugual al prodotto di tutti i lati della ſezione, vale a dire, al prodotto del ſuo contorno moltiplicato per un de' lati qualunque del Priſma.

674. Coroll. *La ſuperficie d' un Priſma retto, e quella di un Cilindro retto, è ugual al prodotto del ſuo aſſe pel contorno d'una delle ſue baſi.* Perchè la ſuperficie d'un Cilindro retto è l'unione delle circonferenze del circolo tra loro uguali, e poſte le une ſull' altre. Dunque ſe la circonferenza del circolo, che ſerve di baſe al cilindro, ſi moltiplica per la ſua altezza, o ſia pel ſuo aſſe, ſi avrà la ſuperficie del cilindro. Lo ſteſso è del Priſma.

675. Teor. III. *La ſuperficie d'una Piramide retta, la di cui baſe è un Poligono regolare, è ugual al prodotto della metà del contorno della ſua baſe, moltiplicata per una perpendicolare tirata dalla ſommità a uno de' lati della ſua baſe.* Queſta perpendicolare ſi chiama l'*Apotema della Piramide*.

Dimoſtr. Perchè la ſuperficie (672) è ugual alla ſomma delle ſuperficie de' triangoli che compongono le ſue facce. Or tutti queſti triangoli eſſendo uguali, la ſomma delle loro ſuperficie è ugual al prodotto dell' altezza d'uno di queſti triangoli (cioè dell' Apotema) per la metà della ſomma delle loro baſi, vale a dire, per la metà del contorno del piede della Piramide.

676. Oſſerv. Se la Piramide non foſſe retta, o ſe la baſe non foſſe un Poligono regolare, non ſe ne potrebbe aver la ſuperficie, che col prendere ſucceſſivamente la ſuperficie di ciaſcuno de' triangoli formanti le facce.

677. Coroll. *La ſuperficie d' un Cono retto è uguale alla metà del prodotto della circonferenza della ſua baſe per la lunghezza de' ſuoi lati, o per uno de' ſuoi apotemi.*

678. Teor. IV. *La ſuperficie di ciaſcuna faccia d' una Piramide qualunque troncata da un piano paral-*

lo alla ſua baſe, è ugual alla metà del proa:- quel che reſta dell' apotema ſu queſta faccia, a ſomma della baſe e della ſezione, o della ret- e termina la parte tagliata. O, ch' è lo ſteſso, *ual al prodotto del reſto dell' apotema per una ilela alla baſe tirata ſu queſta faccia dal punto ezzo del reſto dell' apotema.*

mostr. Ciaſcuna faccia d' una Piramide è (635) riangolo, di cui la ſuperficie è (558) una ſerie ta di rette paralleli alla baſe, le quali ſon in reſſion Aritmetica, di cui il primo termine è la nità di queſto triangolo, l'ultimo è la baſe ſteſ- : il numero de' termini è diſegnato dalla perpen- are abbaſsata dalla ſommità alla baſe. Or la ſu- cie d'una faccia di Piramide troncata parallela- e alla ſua baſe, è la ſteſsa ſerie di cui ſi ſon tol- ' termini verſo il principio, di cui il primo ter- è la retta, che limita la parte tagliata, l'ultimo cora la baſe, e il loro numero è determinato dal nte delle perpendicolare o apotema. Dunque que- uperficie è ugual alla metà del prodotto della ſom- lella ſezione e della baſe pel reſtante dell' apote- o al prodotto della retta media tra la ſezione e ſe pel reſtante dell'apotema, cioè per una per- icolare alla baſe tirata da un punto preſo nella ſe- e.

9. Coroll. I. *Se la Piramide è retta, e ha baſe lare, tutte le ſue facce reſtanti ſon uguali, e le medie tra la ſezione e la baſe fanno il con- ell' elemento della Piramide medio fra le due e- nità.* Dunque la ſuperficie d'una Piramide retta baſe regolare, è ugual al prodotto d'una retta ti- ſopra una faccia da un punto preſo nella linea del- zione perpendicolarmente alla baſe di queſta fac- , pel contorno dell'elemento medio tra le due e- nità della Piramide.

30. Coroll. II. *La ſuperficie d' un Cono retto tron- da un piano parallelo alla ſua baſe, è ugual al*

al prodotto d'uno de' ſuoi lati pel contorno del circolo medio tra le ſue due eſtremità.

681. Teor. V. *La ſuperficie della sfera è ugual al prodotto della circonferenza del ſuo gran circolo, moltiplicata pel ſuo aſſe.*

Dimoſtr. Se ſi dimoſtra che la ſuperficie di ciaſcuno de' Coni troncati, che formano (645) gli elementi della sfera, è ugual al prodotto dell'aſſe, o ſia alla groſſezza di queſto Cono troncato, per la circonferenza d'uno de' gran circoli della sfera; ſi avrà dimoſtrato, che la ſomma di tutte le ſuperficie di queſti coni troncati, e in conſeguenza la ſuperficie della sfera, è ugual al prodotto della ſomma di tutti gli aſſi de' coni, cioè dell'aſſe intiero della sfera, moltiplicata per la circonferenza del ſuo gran circolo.

Onde per Y (fig. 58) mezzo del lato, o apotema AB del cono troncato ABDE preſo ad arbitrio, ſi tiri YR parallela ai piani BD, AE; e YS perpendicolare, che paſſerà (423) pel centro della sfera, e ne farà un aſſe.

Per B ſi tiri BZ perpendicolare all'aſſe AE, e ſi avrà BZ ugual all'aſſe TX del cono troncato. Si tiri RS; i triangoli rettangoli ABZ, YRS ſaranno ſimili, avendo oltre l'angolo retto, l'angolo BAZ = RSY.

Perchè a cauſa delle parallele YR, AE, l'angolo ● AZ = BYR. Or l'angolo BYR ha per miſura (429) la metà dell'arco Y*d*R, come anche l'angolo RSY; dunque l'angolo RSY = BAZ; onde anche ABZ = RYS. Dunque (521) BZ o TX: AB :: YR : YS. Ma (546) le circonferenze de' circoli ſon fra loro come i loro diametri: dunque TX è a AB come la circonferenza del circolo di cui YR ſarebbe il diametro, alla circonferenza di cui YS è il diametro, cioè a quella d'un gran circolo della sfera. Dunque il prodotto di TX per la circonferenza d'un gran circolo della sfera è ugual al prodotto di AB per la conferenza di cui il diametro è YR, e

in

onſeguenza (680) alla ſuperficie del Cono tronca-
3 A E D. Dunque la ſuperficie di queſto Cono tron-
è anche ugual al prodotto del ſuo aſse T X per
irconferenza d'uno de' gran circoli della sfera.
32. Coroll. I. *La ſuperficie della sfera è quadru-
di quella del ſuo gran circolo.* Perchè la ſuper-
del gran circolo della sfera è uguale al prodotto
ſuo ſemidiametro $\frac{1}{2}d$ per la ſua ſemicirconferenza
(568), il quale è $\frac{1}{4}pd$; mentre che la ſuperfi.
della sfera $= pd$, prodotto del ſuo aſse d per la
nferenza p del ſuo gran circolo.
3. Coroll. II. *La ſuperficie della sfera è ugual
ella d' un Cilindro, di cui l' aſſe è agual a quel-
lla sfera, e la baſe ugual al gran circolo della
. Se vi ſi vuol comprendere le baſi del Cilin-
la ſua ſuperficie totale è a quella della sfera*
3 a 2.
rchè allora la ſuperficie della sfera è 4 volte quel-
lla baſe del Cilindro, e la ſuperficie totale del
idro è 6 volte quella della ſua baſe.
4. Coroll. III. *La ſuperficie conveſſa d' una zo-
d' una porzione qualunque di sfera determina-
alla ſezione d' un piano o di due piani paralle-
è ugual alla ſuperficie d' un Cilindro, che aveſſe
ſua baſe un diametro ugual a quello della sfe-
e un' altezza uguale alla groſſezza di queſta zo-
Ovvero ella è ugual al prodotto della groſſezza
la zona pel contorno del gran circolo della sfe-
di cui queſta zona è una porzione.*

Comparazione delle Superficie de' Solidi.

è fin quì veduto che ſe ſi eccettuano le baſi de'
, le loro ſuperficie ſon ſempre uguali al prodotto
ie dimenſioni. Donde ſiegue . . . . .
5. Teor. I. *Che le ſuperficie di due ſolidi qua-
ue della ſteſſa ſpecie, ſon in ragion compoſta di
loro dimenſioni dello ſteſſo nome.*
6. Coroll. I. *Se due ſolidi della ſteſſa ſpecie han-*

no

no ciascuno una dimensione uguale, le loro superficie saran fra loro come l'altra dimensione. Cioè se due Prismi retti, due Cilindri retti hanno una stessa altezza; o se due Piramidi rette con basi regolari, due Coni &c. hanno uno stesso apotema, le loro superficie son come il contorno delle loro basi. E se due Prismi retti, due Cilindri retti, due Piramidi rette con basi regolari, due Coni &c. hanno uguali i contorni delle basi, le loro superficie son fra loro come i loro apotemi. Perchè allora son come i prodotti di due quantità inuguali per una stessa quantità.

687. Coroll. II. *Se le due dimensioni dello stesso nome di due solidi della stessa specie, son in ragion inversa, le superficie son uguali; e reciprocamente.*

Onde la superficie d'un Cilindro retto è ugual a quella d'un altro Cilindro retto, o anche d'un Prisma retto, sorchè l'altezza del primo, è al contorno della base, come il contorno della base del secondo è alla sua altezza; e reciprocamente (562) e 563).

688. Teor. II. *Le superficie totali di due solidi simili son fra loro come il quadrato d'una dimensione qualunque dell'uno, è al quadrato della dimensione omologa dell'altro; o in ragion duplicata delle loro dimensioni omologhe.*

Dimostr. Due solidi simili han tutte le loro dimensioni omologhe proporzionali (670); dunque le loro superficie son fra loro come i prodotti di quantità proporzionali; e per conseguenza in ragion duplicata di queste dimensioni.

689. Coroll. *Le superficie delle sfere son fra loro come i quadrati de' loro assi, o de' loro raggi.* Poichè (663) le sfere son solidi simili, e i loro assi e raggi ne sono dimensioni omologhe.

Della Misura delle Solidità di ciascuna specie di Solidi.

690. Si chiama *Solidità* o *Volume* uno spazio determinato, vuoto o pieno che sia di materia: perchè l'idea

ogni ſpazio determinato riuniſce le tre dimen-
ell'eſtenſione. Perciò quando ſi tratta d'un cor-
le, biſogna ben diſtinguere la ſua *ſolidità* dalla
ſſa e dalla ſua *denſità*. La *Solidità* è lo ſpazio
niverſo racchiuſo tralle ſuperficie delle faccie-
ſto corpo. La ſua *Maſſa* è la quantità aſſoluta
nateria di cui egli è compoſto; e la ſua *Denſi-*
l rapporto del ſuo volume alla ſua maſſa, così
i corpo è tanto più denſo, quanta più materia
ntiene in un piccolo ſpazio.

Il volume d'uno ſpazio, o la ſolidità d'un
è ugual alla ſomma degli elementi, de' quali
a compoſto. La linea è prodotta dal moto con-
del punto, ma non è già compoſta di punti,
compoſta di piccole linee; così la ſuperficie,
rodotta dal moto continuo della linea, è com-
on di linee, ma di piccole ſuperficie; e ſi-
te il Solido, ch' è prodotto dal moto conti-
ella ſuperficie, non è compoſto di ſuperfi-
a di ſpazioli ſolidi. Onde quando ſi dice, che
i e le Piramidi uguali ſon compoſti di ſezioni
, non s' intende che i Priſmi e le Piramidi ſien
le di ſezioni piane, ma di ſezioni infinitamente
e, delle quali la diſtanza o la groſſezza ſia la
e poichè quella groſſezza è minima, ſi traſcu-
ſi conſidera una ſezione piana.

Ragionando ſu i ſolidi come ſi è ragionato ſul-
rficie (552 &c.), ſi vedrà chiaramente, 1.° *Cubi ſon le miſure comuni delle Solidità, o umi.* Per eſempio, un ſolido di 100 piedi, de-
upar uno ſpazio tale da poter eſſer efattamen-
opito da 100 cubi ciaſcuno d'un piede. 2.° *Che ero delle parti d'una miſura in ſolidità è alla terza potenza delle parti della ſteſſa mi-n lunghezza.* Onde un piede ſolido contiene iccoli cubi d'un pollice l'uno; perchè è compo-dodici ſtrati, ciaſcuno de' quali ha un pollice di za, e un piede o 144 pollici di ſuperficie. Co-

così

sì una tesa solida contiene 216 piedi cubici.

693. Teor. I. *La solidità d'un Prisma qualunque, e di qualunque Cilindro, è ugual al prodotto della sua altezza per la superficie della sua base.*

Dimostr. Poichè (622) il Prisma, e per conseguenza il Cilindro, è composto di tanti elementi, o tracce d'un poligono, quanti punti vi sono nella perpendicolare, che misura la distanza delle due basi del Prisma; siegue che per aver la solidità, bisogna aggiunger a se stessa tante volte la superficie del Poligono generatore, quanti son i punti in questa perpendicolare, vale a dire, bisogna moltiplicare la superficie d'una delle basi per l'altezza del Prisma. E'indifferente, che egli sia retto o inclinato.

694. Teor. II. *La solidità d'una Piramide qualunque, o d'un Cono, è ugual al terzo del prodotto delle superficie della sua base per la sua altezza.*

Dimostr. Una Piramide è composta d'un'infinità di Poligoni o di superficie simili, di cui i lati consecutivi crescon uniformemente di $\frac{1}{\infty}$ dalla sommità fin alla base, o come la serie de' numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5. . . . . ∞. Or (573) le superficie simili son fra loro come i quadrati de' lati omologhi. Dunque se si sa la superficie del primo elemento $=$ 1, quella del secondo sarà 4, quel del terzo 9 &c, e quella dell ultimo, ch'è la base, sarà ∞^2. La solidità della Piramide essendo ugual alla somma di tutti i suoi elementi, ella è dunque rappresentata dalla somma della serie infinita de' quadrati 1. 4. 9. 16. . . . . ∞^2. Or (344) questa somma è il terzo del prodotto dell' ultimo quadrato moltiplicato per il loro numero. Dunque la solidità della Piramide è ugual al terzo del prodotto della superficie della sua base pel numero de' suoi elementi, cioè per la sua altezza (632). Lo stesso è del Cono.

695. Coroll. *Una Piramide ha il terzo della solidità di un Prisma d' ugual base e altezza.* Onde colla stessa materia che si compone un prisma, si posson formare

tre Piramidi della ſteſſa baſe e altezzache il Priſma
5. Teor. III. *La ſolidità d'una Sfera è ugual*
e terzi del prodotto del ſuo aſſe per la ſuper-
del ſuo gran circolo.
noſtr. Una Sfera eſſendo compoſta (645) di tan-
ti o ſuperficie ſferiche, quanti punti ſono nel ſuo
aſſe, la ſua ſolidità è ugual alla ſomma di tutte
: ſuperficie. Or le lunghezze de'ſemi-aſſi conſe-
i di queſte ſuperficie formano dal centro la ſerie
a 1. 2. 3. 4. 5..... &c. e le ſuperficie ſteſſe (573)
ie 1. 4. 9. 16. 25..... &c. Dunque la ſolidità del-
era è rappreſentata dalla ſomma della ſerie infi-
le' quadrati conſecutivi, la qual ſomma è (344)
zo del prodotto dell'ultimo quadrato per il loro
ro. Dunque *la ſolidità della ſfera è il terzo*
rodotto della ſua ſuperficie eſteriore s *pel ſuo*
aſſe $\frac{1}{2} d$, ovvero $= \frac{1}{3} s \times \frac{1}{2} d$. Or la ſuperfi-
leriore della ſfera (682) è ugual a 4 volte la
ficie p del ſuo gran circolo, o $s = 4 p$. Dunque
idità della ſfera è $\frac{1}{3} \times 4. b \times \frac{1}{2} d = \frac{2}{3} pd$.
. Coroll. *Se in un Cilindro, il diametro della*
aſe è ugual all'aſſe, s'iſcrive una ſfera, o un
retto, le loro ſolidità ſaranno riſpettivamente
1. $\frac{2}{3}$. $\frac{1}{3}$; o come 3. 2. 1.
. Oſſerv. Per aver la ſolidità degli altri corpi,
di Poliedri irregolari, convien ridurli a Priſmi
imidi; ſiccome per aver la ſuperficie delle figu-
egolari, convien ridurle a triangoli: biſogna
er la ſolidità di ciaſcuno di queſti Priſmi o di queſte
idi, la ſomma ſarà la ſolidità del Poliedro.
lorchè il poliedro è piccolo e troppo irregola-
ome ſe ſi aveſſe a miſurare la ſolidità d'un cio-
grezzo, d'un rilievo di metallo &c., ſi farà mec-
mente così. Si metta il corpo in un vaſo cilin-
o priſmatico, che ſi riempirà d'acqua o d'altro
; trattone indi il corpo, ſi miſuri eſattamente
ume della parte del vaſo che rimarrà vuota;
ſarà a un dipreſſo ugual a quella del corpo,
i ſi era immerſo.

Comparazione delle Solidità de' Solidi.

699. Si è veduto nell'articolo precedente che la ſolidità d'un corpo è un prodotto d'una ſuperficie per un aſſe o per un'altezza; e ſiccome una ſuperficie è ſempre (573) ugual a un prodotto di due dimenſioni, ſiegue che ogni ſolidità è un prodotto di tre dimenſioni. Dunque .....

700. Teor. I. *Le ſolidità di due ſolidi ſon fra loro in ragion compoſta delle loro tre dimenſioni dello ſteſſo nome.*

701. Teor. II. *Le ſolidità di due ſolidi ſimili ſon fra loro in ragion triplicata, o come i cubi d'una dimenſione omologa qualunque preſa in ciaſcuno di queſti ſolidi.*

Dimoſtr. I ſolidi ſimili han tutte le loro dimenſioni omologhe proporzionali (670); dunque le loro ſolidità ſon i prodotti di tre quantità proporzionali, e per conſeguenza ſon in ragione triplicata d'una di queſte dimenſioni qualunque preſa in ciaſcuno di quelli ſolidi.

702. Coroll. I. *Le ſolidità delle ſfere ſon in ragione triplicata de' loro raggi, o de' loro diametri.* Onde ſe una sfera A ha un diametro doppio, triplo, quadruplo &c. di quello d'un'altra sfera B; la ſua ſuperficie ſarà ugual a 4, 9, 16 volte la ſuperficie della sfera B, e la ſua ſolidità ſarà uguale a 8, 27, 64 volte la ſolidità della sfera B. In generale un vaſo, di cui tutte le dimenſioni ſon duple, triple, quadruplex &c. delle dimenſioni d'un altro, contiene 8, 27, 64 &c. volte più dell'altro.

703. Coroll. II. Per coſtruir un ſolido ſimile a un altro, che abbia una capacità o un volume doppio, triplo &c. biſogna che tutte le ſue dimenſioni ſieno a tutte quelle dell'altro, come $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ &c. a 1.

Dalla proporzione delle linee dipende tutta la Trigonometria, e l'uſo importante del Compaſſo di Proporzione.

AP-

APPENDICE PRIMA.

Della Trigonometria.

4. La Trigonometria è l'arte d'applicar il cal- aritmetico alla Geometria. Questa è una scien- ssolutamente necessaria per passare dalla Teoria Pratica. Si chiama così, perchè ella insegna a lare tutte le parti de' Triangoli, e in effetto tut- figure si misurano per i triangoli, ai quali si ri- no.

5. Un triangolo ha sei parti, tre angoli e tre la- L'oggetto della Trigonometria è di dare delle e per risolvere questo problema in tutti i casi: *i la grandezza di tre delle sei parti d'un Tri- lo, trovar quella delle tre altre.*

6. Queste regole consistono a far delle tre date i rimi termini d'una proporzione o d'un'analogia; che si cerca è il quarto. Ma perchè i lati de' goli non han rapporti semplici cogli angoli, de' le misure son archi di circolo d'un raggio inde- inato, ha bisognato sostituire agli angoli o agli , che li misurano, differenti linee rette, che resentassero questi archi, e che fossero in propor- ai lati de' Triangoli. Queste linee rette son no- tto il nome di *Seni*; *Tangenti &c.* e tutta la onometria consiste a sapere la proprietà di queste ; e i casi ove bisogna sostituir le une o l'altre angoli, per aver la proporzione, che può servir lcolar il termine cercato.

7. Sia un angolo qualunque (fig. 59) ACB. crivasi dal vertice C con un raggio preso ad ar- un circolo AH*a*G. Si prolunghi AC in *a*; s' innalzi in C la perpendicolare CH. E' chia- he l'angolo BCH, o l'arco HB è il complemen- ell'angolo ACB o dell'arco AB, è anche dell' lo BC*a*, o dell'arco BH*a*; e l'angolo BC*a* o il arco B*a* è il supplemento dell'angolo ACB o

del ſuo arco AB. Reciprocamente BA è il complemento di HB, e il ſupplemento di *a*B.

708. La perpendicolare BD tirata da una delle eſtremità B del raggio dell'arco AB, che miſura l'angolo ACB ſull'altro raggio CA, ſi chiama il *Seno* dell'arco AB o dell'angolo ACB. La perpendicolare AE elevata all'eſtremità A d'uno de'due raggi ſin al rincontro dell'altro prolungato quanto è neceſſario, ſi chiama la *Tangente* di queſto ſteſſo arco AB; e la retta CE ſi chiama la *Segante* di queſto arco. La parte AD del raggio compreſa tra l'arco e il ſeno, diceſi il *Seno verſo* dell'arco AB. La perpendicolare HK ne è la *tangente del complemento*; CK è la *ſegante del complemento*, e HI *il ſeno verſo del complemento* dell'arco AB.

Per abbreviare, ſi dice *Coſeno*, *Cotangente*, *Coſegante*, *Coſeno verſo*, invece di ſeno del complemento, tangente del complemento &c.

E per più abbreviare, ſi adopra R per raggio; *ſen.* per ſeno; *tang.* per tangente; *coſ.* per coſeno; *cot.* per cotangente; *ſen. v.* per ſeno verſo. Non ſi fa molto uſo delle ſeganti, nè de' ſeni verſi ne' calcoli della Trigonometria.

Siegue da queſte definizioni .....

709. I.° *Che il ſeno, il coſeno, la tangente, e la cotangente &c. d'un angolo ottuſo* BC*a* *ſon le ſteſſe, che per l'angolo acuto* ACD, *ch'è il ſuo ſupplemento*. Perchè da una delle eſtremità B o *a* d'uno de'raggi non ſi può abbaſſare le perpendicolari BD, *ad* che ſul prolungamento dell'altro.

Similmente la tangente non può eſſere che *ae*. Or a cauſa de'triangoli uguali *a*C*d*, BCD, e C*ae*, CAE, ſi ha *ad* = BD, *ae* = AE. E l'arco BH eſſendo il complemento di *a*B come anche di AB, è chiaro che BI è il coſeno di *a*B, e HK è la ſua cotangente.

710. II.° *Che il ſeno* BD *d'un arco* AB *è la metà della corda* BG, *che ſottende l'arco* BAG *doppio di* AB (412).

711.

1. III.° *Che il più grande di tutti i ſeni è quell'angolo retto* HCA, perchè allora è il raggio ; il che fa che ſi chiami *Seno totale*.

2. IV.° *Che i ſeni creſcono a miſura che gli angoli creſcono da o fin a* 90° ; *e indi decreſcono nella ſteſſa maniera da* 90° *fin a* 180.°

3. V.° *Che il ſeno d'un arco di* 30° *è ugual alla metà del raggio*. Perchè il raggio è (497) la corda d'un arco di 60°, e un ſeno (710) è la metà della corda d'un arco doppio. Onde *il lato oppoſto a un angolo di* 30° *in un triangolo rettangolo, è la metà dell'ipotenuſa di queſto triangolo*; perchè ſe ACB foſſe di 30°, BG ſarebbe ugual a BC, e BD ne ſarebbe la metà.

4. VI.° *Che le tangenti e le ſeganti creſcono a miſura, che gli angoli creſcono da o fin a* 90°, *in maniera che la tangente e la ſegante, che corriſpondono a* 90° *ſon infinite*. Perchè il raggio dell'angolo HCA non può rincontrar la tangente AE per terminarla, ſe queſte due rette non ſi prolungan all'infinito.

5. VII.° *Che la tangente di* 45° *è ugual al raggio*. Perchè ſe l'angolo ACB foſſe di 45°, il triangolo rettangolo CAE ſarebbe iſoſcele, e AE ſarebbe ugual a AC.

6. VIII.° *Che il ſeno verſo* AD *d'un arco* AB *minore di* 90° *è ugual alla differenza tra il raggio e il coſeno* CD = BI; *che il ſuo coſeno verſo è la differenza tra il raggio* CH *e il ſeno* CI *o* BD; *e che il ſeno verſo del ſupplemento, ch'è* EB, *è ugual alla ſomma del raggio e del coſeno*.

7. IX.° Che a cauſa de' triangoli rettangoli ſimili CDB, CAE, CIB, CHK; ſi ha CA : CD :: AE : BD; ovvero R : *coſen* :: *tang* : *ſen*. CH : CI o BD :: HK : IB; ovvero R; *ſen*:: *tang* : *coſen*. Finalmente AE : CA :: CH o CA ; o ſia ÷ *tang* : R : *cotang*.

Da queſte proporzioni ſi deducon le formole ſeguenti per ſoſtituir i ſeni alle tangenti &c. e reciprocamente.

Sia R = 1, si ha .....

718. $\text{Sen} = \text{Cos} \times \text{tang} = \frac{\text{Cos}}{\text{Cot}}$,

719. $\text{Cos} = \text{Sen} \times \text{Cot} = \frac{\text{Sen}}{\text{Tang}}$,

720. $\text{Tang} = \frac{\text{Sen}}{\text{Cosen}} = \frac{1}{\text{Cotang}}$,

721. $\text{Cot} = \frac{\text{cos}}{\text{sen}} = \frac{1}{\text{tang}}$.

722. Cot. A × Tang. A = 1 = Cot. B × Tang. B.

L'intelligenza di queste formole dipende tutta dall' articolo 717. Per comprender la formola 718, si osservi, che per la prima proporzione del 717 si ha R : *cosen* : : *tang* : *sen*; dunque R × *sen* = *cosen* × *tang* : ma R = 1, dunque 1 × *sen* = *cosen* × *tang*, ovvero *sen* = *cosen* × *tang*. Nello stesso articolo 717 la seconda proporzione è R : *sen* : : *cot* : *cos* ; dunque *sen* × *cot* = R × *cos* = 1 × *cos*. Dunque *sen* × *cot* = *cos*; dunque $sen = \frac{cos}{cot}$.

Lo stesso è dell'altre formole ricavate tutte dall'articolo 717.

723. Per sostituir i seni, tangenti &c. agli archi o agli angoli de' triangoli, ha bisognato ordinar delle tavole di calcoli fatti per trovar in un'occhiata il valore del seno, del coseno, della tangente, della cotangente di ciascun grado e minuto di tutti gli angoli acuti possibili, perchè in quanto a quelli degli angoli ottusi si conoscono per i loro supplementi. Queste tavole son note sotto il nome di *Tavole de' Seni*. Vi si suppone che il raggio del circolo, che misura ciascun angolo, è = 1, e vi si ha posto dirimpetto a ciascun grado e minuto il valore, in frazioni decimali, del

suo

seno, e della sua tangente, del suo coseno, e la sua cotangente.

Ecco su quali principj si costruiscono queste tavole.

Principj per la Costruzione delle Tavole de' Seni.

724. Teor. I. *Conoscendo per mezzo d'un arco qualunque* AB (fig. 59) *una di queste quattro cose, il suo seno, il suo coseno, il suo seno verso, il suo coseno verso, si ha quella delle tre altre, che si vuole.*

Perchè si vede (528) che $CD = \sqrt{(CB^2 - \ldots^2)}$ ovvero $\cos = \sqrt{RR - \text{sen}^2}$). Che $= CA - CD$, ovvero sen v. $= R -$ coseno, $HI = CH - CI$, o cos v. $= R -$ sen &c.

725. Teor. II. *I calcoli fatti per un arco servono a trovare quel che ci vuole per la sua metà.*

Dimostrazione. Dato l'arco AEB (fig. 60), la sua corda AB, il suo seno retto BD, il suo centro C, i suoi raggi CA, CB &c. dico che tutte queste date cose condurranno a trovar facilmente il valore del seno della metà dell'arco AEB. Si tiri dal centro C il raggio CE perpendicolare alla corda BA, la quale sarà divisa in F in due parti uguali, come l'arco AB in E. Si cerchi (724) il valore del *sen* v. AF, e quello di CD *cos* dell'arco AEB, di cui si sa il seno retto BD.

Dim. Nel triangolo rettangolo BDA, $BA^2 = BD^2 + DA^2$; dunque $BA = \sqrt{(BD^2 + DA^2)}$; $\frac{BA}{2} = \frac{\sqrt{(BD^2 + DA^2)}}{2}$; Ma $\frac{BA}{2} =$ FA è il seno retto dell'arco AE metà dell'arco AEB; dunque il seno retto della metà dell'arco AEB, o $\text{sen}\,\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{(D^2 + DA^2)}}{2}$

Onde i calcoli fatti per un arco servon a trovare quel che ci vuole per la sua metà.

726. Teor. III *I calcoli fatti per un arco ſervon a trovare quel che ci vuole per il ſuo doppio.*

Quì le quantità cognite ſono l'arco AE, e il ſuo ſeno retto FA, l'arco AEB doppio dell'arco AE, e la ſua corda AB, di cui il valor è doppio di quello del ſeno retto FA, i raggi AC, EC, BC, e finalmente il *coſen.* CF dell'arco AE. Si tratta dunque di trovare per mezzo di queſte cognite il valore di BD ſeno ſetto dell'arco AEB.

Dim. I due triangoli rettangoli CFA, BDA che han l'angolo A comune, ſon equiangoli; dunque CA: CF :: BA: BD; ma i tre primi termini di queſta proporzione ſon noti (724), dunque lo ſarà anche il quarto &c.

727. Teor. IV. *Eſſendo dati i ſeni* BD, KL *di due archi* AB, KB, *ſi ha il ſeno* KM *della loro ſomma* (fig. 61), *o della loro differenza* (fig. 62). Perchè ſi ha (724) CD e CL. Or CB : CL :: BD : LP o OM; dunque $OM = \frac{\text{sen AB} \times \text{cos KB}}{R}$; e a cauſa de' triangoli rettangoli ſimili KOL, CMQ, OLG, CBD (fig. 61); e KOL, KMQ; CQL, CBD (fig. 62); ne' triangoli KOL, CBD (fig. 61 62) ſi ha CB : CD :: KL : KO; dunque $KO = \frac{\text{sen KA} \times \text{cos AB}}{R}$; dunque facendo R = 1, KM o ſen (BK ± AB) = ſen BK × cos AB ± ſen AB × cos KB.

728. Teor. V. *La ſomma del ſeno* KM (fig. 63) *d'un arco* KA *minore di* 30° *e del prodotto di* $\sqrt{3}$ *pel ſeno* KI *della differenza tra queſt'arco e* 30°, *è uguale al ſeno* FN *d'un arco* FA *che eccede tanto* 30°, *quanto l'arco* KA *è minore.*

Sia l'arco AB di 30°, e BF = BK; a cauſa de' triangoli rettangoli ſimili SIF, SQG, l'angolo IFS = GQS = BQA = 30°. Dunque l'angolo KFG = 30°; dunque (713) $GK = \frac{1}{2} FK = IK$. Or

FK²

$K^2GK^2 = FG^2$, o $4IK^2 - IK^2 = FG^2$ Dunque $3IK^2$, o $IK^2 \times 3 = FG^2$. Dunque estraendo le radici, $IK \times \sqrt{3} = FG$, e $IK \times \sqrt{3} + KM = FN$.

729. Teor. VI. *La somma del seno* FT *d'un arco* AF *minore di* 60°, *e del seno* FI *della differenza fra* 60°, *è uguale al seno* KO *d'un arco* HK, *che eccede tanto* 60°, *quanto* HF *n'è minore*.

$FI = IK = GH$ (728). Dunque $FT + FI = KO$. Onde per esempio, sen 55° + sen 5° = sen 65°.

730. Si possono trovar tutti i seni per mezzo di questi teoremi. Perchè il seno di 30° essendo noto (713). pel Teor. 1 e 11 si può aver il seno di 15°, poi di $7° \frac{1}{2}$, indi di $3° \frac{3}{4}$, e così via via andando per metà fin alla duodecima operazione, che dà il seno di 5^{11} 44^{111} 3^{1111} $\frac{3}{4}$, il qual è confuso senza errore sensibile col suo arco. E perchè tali seni così confusi co' loro archi sono loro proporzionali, si farà, come quest' arco è al suo seno, così l' arco di 1^1 è al suo seno; avendo il seno di 1^1 si avrà (726) quello di 2^1, poi (727) quello di 3^1, quello di 4^1 &c. fin a 30°. Indi (728) da 30° fin a 60°, finalmente (729) da 60° fin a 90°. Dopo di che il calcolo delle tangenti è facile per mezzo di qualche formola dell' articolo precedente.

Principj per la Teoria del Calcolo Trigonometrico.

731. Teor. I. *In ogni triangolo i seni degli angoli son come i lati opposti*.

Dim. Iscrivasi (fig. 65) nel circolo O il triangolo ABC, e da O si abbassino sopra i lati AB, AC, BC, i raggi perpendicolari OF, OI, OE, che divideranno per metà i predetti lati e gli archi, de' quali questi lati son le corde. AD metà del lato AB è il seno retto dell'arco AF, o dell'angolo C misurato da quest' arco; AL metà di AC, è il seno retto dell' arco AI misura dell'angolo B; così BG metà di BC, è seno retto dell'arco BE misura dell'angolo A. Dunque in ogni triangolo la metà di ciascun lato è il seno retto dell'

dell'angolo opposto. Ma le metà son come i tutti; dunque in ogni triangolo i seni retti degli angoli son come i lati opposti.

732. Coroll. I. *In un triangolo rettangolo il raggio è all'ipotenusa, come il seno d'uno degli angoli acuti è al lato opposto a quest'angolo.*

Dim. Centro B (fig. 66) raggio BC descrivasi il circolo CDF, e il circolo BEH; si prolunghi il lato CA in E, e BA in D. E' chiaro che CB è nel tempo stesso raggio e ipotenusa. Dunque CB considerato come raggio: CB considerato come ipotenusa :: CA considerato come seno retto dell'angolo acuto B: CA considerato come lato opposto a quest'angolo. Similmente CB considerato come raggio: CB come ipotenusa :: BA come seno retto dell'angolo acuto C: BA come lato opposto a questo medesimo angolo. Dunque &c.

733. Coroll. II. In un triangolo rettangolo il coseno d'uno degli angoli acuti è il seno dell'altro; dunque (731) il seno d'uno degli angoli acuti è al suo coseno, come il lato opposto a quest angolo è all'altro lato. Ma (717) il seno è al coseno, come la tangente è al raggio. Dunque *nel triangolo rettangolo la tangente d'uno degli angoli acuti è al raggio, come il lato opposto a quest'angolo acuto è all'altro lato.*

734. Coroll. III. *Conosciuti tre angoli d'un triangolo, si può conoscer il rapporto de' lati, ma non già i valori assoluti di essi lati.* Perchè tutto quel che si può dedurre dalla cognizione di questi angoli, è che i tre lati opposti sono nel rapporto de' seni di questi angoli. Nè si può determinar la grandezza di questi lati, perchè si può costruir un'infinità di triangoli inuguali, che sieno simili, e che abbian in conseguenza i loro angoli omologhi uguali.

735. Teor. II. *In un triangolo qualunque* (fig. 64) ABC *si ha questa analogia: il più gran lato* AC *è a* AB + BC *somma de' due altri, come* AB — BC *loro differenza è alla differenza de' segmenti* AE, CE *del maggior lato, formati pel rincontro della perpendice-*

olare BE *tirata dal maggior angolo* B *al maggior* AC.

Dim. Se dall' angolo B come centro coll' interval'o minor lato BC si descrive un circolo GCD, e si lunga AB in G; è chiaro che AG = AB+BC, AP = AB — BC; e perchè (412) CE=ED, na EA — CE = AD. Or (532) AC: AG :: : AD.

736. Teor. III. *In ogni triangolo rettilineo scaleno* BC (fig. 67) *la somma di due lati qualunque* B + BC *è alla loro differenza* AB — BC, *come tangente della semi-somma de' due angoli* A, C *posti a questi lati è alla semi-differenza di questi ngoli.*

Per comprender facilmente questa proposizione biso- na ricordarsi:

1.° Dell' articolo (193)

2.° Che l'angolo esterno (456) BAF è uguale a' ue interni B, C; onde l'angolo BAF rappresenta la omma de' due angoli opposti ai due lati noti AC, AB el triangolo BAC.

3.° Che la somma degli angoli B, C è nota, dac- che si conosce il valore di A (452)

4.° L'angolo BEF alla circonferenza è la metà dell' angolo BAF al centro (431). Dunque l'angolo BEF, o BEA rappresenta la metà della somma degli angoli B, C del triangolo BAC.

5.° Nel triangolo isoscele BAE, l'angolo BEA = ABE (463). Onde l' angolo ABE rappresenta la metà della somma degli angoli B e C del triangolo BAC.

6.° Le due parallele BE, GC son tagliate dalla linea FC; dunque (396) l'angolo BEF o BEA = FCG. Onde anche l'angolo FCG rappresenta la metà della somma degli angoli B e C.

7.° La linea BC taglia obbliquamente le due parallele BE, GC; dunque (396) l'angolo EBC=BCG,

8.° La linea FG taglia le due parallele BE, CG; dunque (396) l'angolo FBE=FGC; ma l'angolo FBE è ret-

è retto (432) , dunque FGC è anche retto.

9.° L'angolo BCG rappresenta la metà della differenza degli angoli B e C del triangolo BAC; perchè l'angolo ABE è la metà della somma degli angoli B e C (5°): lo stesso è anche dell' angolo FCG (6°). Or si unisca all' angolo ABE il piccol angolo EBC o BCG, e si avrà il più grande de' due angoli B e C, cioè l'angolo B. Si tolga dall'angolo FCG l' angolo BCG, e si avrà il più piccolo, cioè l'angolo C. Dunque il lato AC > AB (459).

10.° (fig. 68) Se nel triangolo ABC rettangolo in B, si prende AC per raggio del circolo, o per seno totale, CB diverrà la tangente dell' angolo opposto A.

11.° La linea FC è la somma de' due lati AC e AB; il segmento EC è la loro differenza; l'angolo FCG la metà della somma degli angoli B e C del triangolo BAC; l'angolo BCG la metà della differenza de' predetti angoli; CG il seno totale, FG la tangente dell' angolo FCG o della metà della somma degli angoli B e C; BG tangente dell'angolo BCG o della metà della loro differenza. Premesse tutte queste cose.

Dim. A causa delle parallele BE, GC, sarà (520) FE. : EC :: : FB : BG. Dunque componendo, FE + EC = FC : EC :: FB + BG = FG : BG. Dunque &c.

737. Osserv. Quest'analogia si può ridurre a queste due, *Come il minor lato* BC *è al maggior* BA, *così il raggio è alla tangente d' un angolo, da cui bisogna togliere* 45°. Indi *Come il raggio è alla tangente del residuo, così la tangente della semi-somma degli angoli* A *e* C, *è alla tangente della loro semi-differenza*,

Dim. Avendo preso (fig. 64) BP = PT = BC, poi PM = BA, sarà TM = AB — BC. Si tiri BN che faccia l'angolo NBA di 45°, e dai punti T, M si abbassino sopra BN le perpendicolari TK, MN, e si congiunga KP. Allora i triangoli BKP, BKT, BNM son rettangoli, isosceli, e simili : dunque BK = KT,

: KT, BP = PK = PT = BC, e BN = NM. posto, nel triangolo rettangolo PKM si ha (733) o BC : PM o AB : : R : *tang* PKM. Da quest' olo togliendo 45°, resta TKM = KMN. Or (733) : *tang* KMN : : MN o BN : KN : : BM o AB

$$BC : TM \text{ o } AB - BCt : tang \frac{A+C}{2} : tang \frac{A-C}{2} \quad (736).$$

Usi della Teorìa precedente per i Calcoli Trigonometrici.

738. Ne' calcoli Trigonometrici non si fa ora uso e de' Logaritmi sì de' Seni, Tangenti, e Cotangen-, come de' numeri, ch' esprimon il valore de' lati. erciò le tavole de' seni che son in uso, contengon i ogaritmi de' seni, coseni &c., e una tavola de' Lo-aritmi de' numeri naturali da 1 fin a 10000, ovvero 0000; il che è sufficiente per la pratica.

739. Nelle tavole de' seni si suppone il raggio, o seno totale = 10000000000, così che la caratte-istica del logaritmo del raggio è 10, donde si vede, 1.° *che per aggiunger il logaritmo del raggio a un al-tro logaritmo, basta metter* 1 *avanti la Caratteristi-ca di questo logaritmo, se ella è al di sotto di* 10, *come lo è ordinariamente: o aggiunger* 1 *alle decine di questa Caratteristica, se ella eccede* 10. Al con-trario, *dato un logaritmo, per toglierne il logaritmo del raggio, bisogna togliere* 1 *dalle decine della sua Caratteristica.*

740. 2.° *Che i calcoli de' triangoli rettangoli, ove entra il raggio* (come accade quasi in tutti i casi, come si vedrà), *si riducon a una semplice addizione di due logaritmi, se il raggio è nel primo termine dell' analogìa: o a una semplice sottrazione di due lo-garitmi, se il raggio è nel secondo termine.* Il che

rende

rende questi calcoli molto più corti di quelli degli altri triangoli; perche l'addizione, o la sottrazione di 1 non deve contarsi per un'operazione.

Calcoli de' Triangoli Rettangoli.

741. Per facilitare la pratica del calcolo de' triangoli rettangoli, suppongasi che si chiami A l'angolo retto (che si stima sempre uno de' tre dati), B uno degli angoli acuti, e C l'altro angolo. Nella tavola seguente si troverà l'analogia o il calcolo, che bisogna far in tutti i casi.

Per maggior intelligenza della tavola seguente, si dimostra il risultato del primo Problema, da cui si conosceranno tutti gli altri.

Probl. 1.° *Dati i lati* AB, AC, *e l'angolo retto* A *del triangolo rettangolo* BAC (fig. 66), *trovar l'ipotenusa* BC.

Sol. $BC^2 = AC^2 + AB^2$; dunque $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$. Ma siccome il calcolo de' quadrati è lungo, meglio è conoscer l'angolo B per l'analogia seguente. Il lato AB: lato AC :: raggio: tangente dell'angolo B (733). Conosciuto l'angolo B, sarà (731) il seno dell'angolo B: seno dell'angolo retto A o raggio: : lato AC: BC.

E' d'avvertirsi ancora, che dal problema 16 fin al 21 son noti tutti gli angoli del triangolo rettangolo, poichè si è supposto conoscere uno de' due angoli acuti.

Essendo

	Essendo dati	Trovar	Analogie, o Regole del Calcolo.
1	AB, AC	BC	$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2}$
			o AB: AC :: R : *tang* B, poi *sen* B: R :: AC: BC.
2		B	AB: AC :: R : *tang* B.
3		C	AC: AB :: R *tang* C.
4	AB, BC	AC	$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2}$
			o *Log* $AC = \frac{1}{2}$ *log* (BC + AB) + $\frac{1}{2}$ *log* (BC − AB)
5		B	BC: AB :: R : *cosen* B.
6		C	BC: AB :: R : *sen* C.
7	AC, BC	AB	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$
			o *Log* $AB = \frac{1}{2}$ *log* (BC + AC) + $\frac{1}{2}$ *log* (BC − AC)
8		B	BC: AC :: R : *sen* B.
9		C	BC: AC :: R : *cosen* C.
10	AB, B	AC	R : *tang* B :: AB: AC
11		BC	*Cosen* B: R :: AB: BC.
12	AB, C	AC	R : *Cotang* C :: AB: AC
13		BC	*Sen* C: R :: AB: BC.
14	AC, B	AB	R : *cotang* : B :: AC: AB
15		BC	*Seno* B: R :: AC: BC.
16	AC, C	AB	R : *tang* C :: AC: AB
17		BC	*Cosen* C: R :: AC: BC.
18	BC, B	AB	R : *cosen* B :: BC : AB
19		AC	R : *sen* B :: BC: AC.
20	BC, C	AB	R : *sen* C :: BC: AB
21		AC	R : *cosen* C :: BC : AC.

742. Tutte queſte analogie, non ſon altro, che l'applicazione de' Corollarj I. e II. (732, 733) a tutti caſi de' triangoli rettangoli.

Calcoli de' Triangoli Obliquangoli.

743. I. *Dati due angoli e un lato, trovar gli altri lati.*

Come il ſeno dell' angolo oppoſto al lato noto è a queſto lato, così il ſeno dell'angolo oppoſto al lato cercato è a queſto lato. (731)

744. II. *Eſſendo dati due lati e un angolo oppoſto a uno de' due, trovar l'angolo oppoſto all' altro*: purchè ſi ſappia ſe è acuto o ottuſo.

Senza queſta precauzione ſi eſporrebbe all'errore di prender l'uno per l'altro; perchè (709) un angolo acuto di qualunque triangolo ha lo ſteſſo ſeno retto che l'angolo ottuſo, il quale gli ſerve di ſupplemento.

Sia (fig. 67) l'angolo C di 30°, il lato AB di 25 piedi, il lato BC di 40; qual'è il valore dell' angolo A del triangolo ABC?

(731) Logaritmo del lato AB : logaritmo dell' angolo C : : logaritmo del lato BC : logaritmo dell' angolo A. Vale a dire 1, 3979400. 9, 6989700 : 1, 6020600. 9, 9030900. Queſt' ultimo logaritmo corriſponde nelle tavole a un angolo di 53° 8′, e a un angolo di 126° 52′. Era ben dunque neceſſario avvertire, ſe l'angolo richieſto ſia acuto o ottuſo.

745. III. *Dati due lati e l'angolo compreſo, trovar gli altri angoli.*

Come la ſomma de' lati dati,

Alla loro differenza:

Così la tangente della ſemi-ſomma degli angoli incogniti.

Alla tangente della loro ſemi-differenza. (736)

Sia (fig. 64) AB = 865 piedi, CB = 517, e l'angolo ABC = 96° 36′. Per i logaritmi ſi farà

AB

AB..	865	ABC...	96° 36′
BC..	517	Supl....	83° 24′

m.	1382	Semi-Som.	41° 42′
ff.	348	.. Log...	2, 54158
ng	41° 42′	.....	9, 94986
			12, 49144
Long.	1382,	. .	3, 14058
			9, 35093 Log. Tang. 12° 39′

semi-diff.

La semi-somma . . . . . 41° 42′

Il mag. angolo . . . 54° 21′

Il minor angolo . . . 29° 3′

L' angolo ACB opposto al più gran lato AB, è il ggiore, e per conseguenza è di 54° 21′; l'altro anlo BAC è 29° 3′.

746. IV. *Dati due lati, e l'angolo compreso; trovar il terzo lato.*

Convien cercar gli angoli per la regola precedente, il terzo lato per (743).

747. V. *Dati i tre lati, trovar i tre angoli.*

Se si hanno (fig. 64) i tre lati AC, AB, BC, per ovar un angolo qualunque A, bisogna prima fare esta analogia:

Come il maggiore de' tre lati AC,
E' alla somma de' due altri AB + BC:
Così la differenza de' due altri lati AB—BC,
E' alla differenza AD *de' segmenti* CE, EA del ggior lato, fatti per una perpendicolare BE menadal suo angolo opposto B.

Essendo dunque AC la somma de' segmenti CE, EA; AD essendo la loro differenza, CE sarà (193) ugual a metà di AC—AD; e EA sarà ugual alla metà di C+AD. Perciò ne' triangoli rettangoli CEB, BEA conosceranno i due lati BC, CE, e AB, AE; si trà dunque trovar il valore degli angoli (741).

Applicazione alla Trigonometria.

La Trigonometria come l' Aritmetica, esige non men teorìa che pratica, per esercitarsi nella quale si son aggiunti i problemi seguenti.

Si son premesse ancora le due seguenti tavole, le quali son un compendio di tutte le Regole precedenti per tutti i casi di ogni specie di Triangoli *Rettilinei Rettangoli*, e *Rettilinei Obbliquangoli*; colla distinzione di *Dati*, *Quesiti*, *Soluzioni*, o *Analogie* in termini generali applicabili ad ogni triangolo, o figura comunque segnata.

R. significa raggio o seno totale; L. lato: LL. lati; A. angolo; D. dato; DD. dati: Q. quesito; Adiac. adiacente; Op. opposto; S. seno; Cos. coseno; Tang. tangente; Cot. cotangente; Ipot. ipotenusa; B. base; Segm. segmento; Vert. verticale.

TAVOLA

TAVOLA I.

Regole de' Triangoli Rettilinei Rettangoli.

ati	Queſiti	Soluzioni.
	I. L'altr' Ang.	Complemento del Dato
ten. un golo	II. Lato oppoſ.	R : Ipot. :: S. A. D. : L. Q.
	III. Lato adjac.	R : Ipot. :: Coſ. A. D: L. Q.
ten. un to	IV Ang. oppoſ.	Ipot. : R :: L. D : S. A. Q.
	V. Ang. adiac.	Complemento del trovato n. IV
	VI. L'altr. Lato	Si trov. gli Ang. n. IV e V, indi il L. n. II.
golo ato oſto	VII. L'al. Ang.	Complemento del Dato
	VIII. L'Ipoten	S. A. D : L. D :: R : Ipot.
	IX. Lato adiac.	S. A. D : L. D :: Coſ. A. D: L. Q.
olo to c.	X. L'altr' Ang.	Complemento del Dato
	XI. Lato opp.	Coſ. A. D : L. D :: S. A. D : L. Q.
	XII. Ipotenuſa	Coſ. A. D. L. D :: R : Ipot.
e i	XIII. Un Ang.	L. I : L. D. Q :: R : Tang. A. Q.
	XIV. Ipoten.	Si trovi un Angolo n. XIII. Indi S. A. trovato :: R : L. Op: Ipot.
e g.	XV. Proporz. de' Lati	Per ſeni, o per Tangenti.

TAVOLA II.

Regole de' Triangoli Rettilinei Obbliquangoli.

Dati	Quesiti	Soluzioni.
Due Angoli e un Lato opposto	I. Terzo Ang.	Supplemento de' Dati a 180°
	II. L. op. all' A. 2	S. A. D: L. Op. :: S. A 2: L. Q.
	III. Terzo Lat.	Per il num. 1. e II.
Due Ang. e lato intercet.	IV. Terzo Ang.	Supplemento
	V. Un altro Lato	S. A. 3° (n. IV.) L. D :: S. A. Op. Q: L. Q.
Due Lati e un Ang. opposto	VI. L'alt. Ang. opposto	L. Op. A. D: S. A. D :: 2. L. D: S. A. D.
	VII. Il 3.° Ang.	Per il num. VI. e I.
	VIII. Il 3.° Lat.	Per il num. VI. VII. II.
Due Lati e l' Ang. interc.	IX. Un Ang.	Som. LL. DD: Differ.: Tang $\frac{1}{2}$ Ang. ignoti ═══ Supplem. A. D: Tang $\frac{1}{2}$ Diff.
	X. Il 3.° Lato	Per il num. precedente, e n. II.
Tre Lati	XI. Un Ang.	L. mag. som. degli altri LL: : diff. de' LL: diff. segm.
Tre Angoli	Proporz. de' Lati	Per i seni degli Angoli dati.

748. Probl. I. *Trovar una distanza inaccessibile* CD fig. 69.).

Sol. Si formi la base D A almen di 20 tese. Si mirino col Grafometro gli angoli D, A formati dalle suali DC, AG, e dalla base DA, supposto che l' golo A sia 80°, e l'angolo D di 70°, sarà l'angolo di 30. Resta ora da conoscer il lato CD. Per coscerlo si faccia (743) questa analogia.

ll seno dell'ang. C di 30°: al lato AD di 20 te- :: il seno dell'ang. A di 80°.: al lato CD. Cioè 69897000. 1, 3010300: 9, 9933515. 1, 5954115 nque CD o sia la distanza richiesta sarà di 39 te- e 2 piedi.

749. La grandezza della base deve esser proporzioa alla distanza che passa tra il luogo dell'operazioed il luogo che si ha misurare; affinchè l'angolo nato delle visuali al punto inaccessibile non sia tropacuto.

'inuguaglianza e gli ostacoli del terreno impedio spesso di aver una base abbastanza grande, co di mille pertiche per misurar luoghi inaccessibili nti 5 in 6 miglia. In tali casi bisogna prender da cipio una piccola base, per mezzo di cui se ne aver un'altra tre o quattro volte più grande, e questa seconda se ne avrà una terza ancora più de per fare l'operazione.

o. Probl. II. *Trovar la distanza inaccessibile tra luoghi* C, D (fig. 70).

l. Si fissi la base AB = 100 tese. Si misurino ngoli ABC = 92°, e ABD = 45°, formati all' nità B della base AB e delle visuali BC, BD. stessa maniera si misurino gli angoli DAB = DAC = 50°, formati all'estremità A della ba- l e dalle visuali AD, AC.

ti questi angoli, è facile conoscer il valore de' C e BC del triangolo ABC, perchè si conosce AB = 100 tese, l'angolo B = 92 gradi, e lo CAB = 48 gr., e per conseguenza l'angolo = 40 gr. Dunque per aver il valore del lato

BC ſi ha da fare queſta analogia; Il ſeno dell'angolo ACB = 40: AB = 100 teſe :: il ſeno dell'angolo CAB = 48 : CB ; cioè 9 , 8080675 . 2 , 0000000: 9, 8710735. 2, 0630060; dunque CB = 116 teſe.

Per trovar il lato AC , biſogna dir ancor il ſeno dell'angolo ACB = 40 gr.: BA = 100 teſe :: angolo ABC = 92 gr.: AC, ſarà il lato AC = 155 teſe.

Nella ſteſſa maniera ſi conoſcerà il valore del lato DA, facendo il ſeno dell'angolo ADB = 37 gr.: AB = 100 teſe :: il ſeno dell'angolo ACD = 45 : AD ; ſarà il lato AD = 118 teſe.

Eſſendo ora noti i lati AD = 118 teſe, AC = 155 teſe, e l'angolo DAC = 45 gr., conoſceremo il lato DC del triangolo ACD; poichè cercando da principio gli angoli in D ed in C, la ſomma de due lati AC, AD è alla loro differenza , come la tangente della metà della ſomma degli angoli in D ed in C è alla tangente della metà della differenza. L'angolo C ſarà circa 8 gr.. Avendo così l'angolo C, che ſi ſupporrà il più grande, per aver il lato CD, ſi farà queſta Proporzione, il ſeno dell'angolo C è al lato AD noto, come il ſeno dell'angolo A è al lato DC, che è la diſtanza richieſta, la quale ſarà di 651 teſe.

751. Probl. III. *Tirare dal punto* C *una linea parallela ad un altra* AB *inacceſſibile* (fig. 71).

Sol. Prendaſi la baſe CD di 150 teſe proporzionata alla diſtanza dell'oggetto.

Già ſi sà, che ſe due parallele ſon tagliate da un' altra linea, gli angoli alterni ſon uguali: reciprocamente ſe gli angoli alterni ſon uguali , le linee ſon parallele. Dunque ſe ſi conoſce l'angolo ABC formato dalla parallela AB, e dal raggio viſuale CB, non ſi avrà che far l'angolo BCE ugual al precedente , affinchè la linea CE ſia parallela all'AB; onde tutto ſi riduce a trovar il valore dell'angolo ABC.

Per conoſcerlo, s'incominci dal punto C a prender il valore dell'angolo ACB = 40 gr. Indi dal punto D ſi prenda il valore dell'angolo CDB = 86 gr. Si prenda ancora il valore dell'angolo ADB = 60 gr.

Note

Note tutte queſte coſe, ſi trovi il valore de' lati
CA, CB.

Perciò ſi cerchi nel triangolo CDB il valore del
ato CB, facendo il ſeno dell' angolo CBD = 14 gr.:
l lato CD = 150 :: il ſeno dell'angolo CDB = 86
r.: CB. Sarà il lato CB = 619. teſe.

Per trovar il lato CA, ſi avverta che eſſendo l'an-
olo CDB = 86 gr., ed ADB = 60 gr., ſarà l'an-
olo CDA = 26 gr.; ed eſſendo l' angolo CDB =
, CDB = 14, ſarà l'angolo BCD = 80, ed in
nſeguenza l' angolo ACD = 120, dunque ſarà
AD = 34 gr. Ciò poſto, il ſeno dell'angolo CAD
34: 150 teſe CD :: il ſeno dell'angolo CDA =
: lato CA; ſarà dunque CA = 118 teſe.

Conoſcendo ora i lati CA = 118 teſe, CB = 619
ſe, e l'angolo ACB = 40 gr., ſi conoſcerà ſubito
ngolo CBA, che ſarà = 62 gr. 23 min., cui ſi
cia uguale l'angolo BCE; la linea CE ſarà la ri-
ieſta parallela alla BA.

752. *Probl.* IV. *Miſurar l'altezza* AB *di una Fab-
ica acceſſibile* (fig. 73).

Si miſuri eſattamente la baſe EB dal punto di mez-
B della fabbrica fin al luogo E, dov'è piantato il
ıfometro. Sia queſta baſe = 25 teſe.

ia l'angolo ACD = 35 gr. formato da due raggi
ıali, di cui il primo CD è parallelo all' Orizzon-
e l'altro CA termini alla ſommità dell'edifizio.

n queſto triangolo CAD è noto il lato CD = 25
:, l'angolo in C = 35 gr., l'angolo retto in D
90, dunque ſarà l'angolo in A = 55 gr.

Dunque (741) il ſeno totale: alla tangente dell'
olo C = 35 :: il lato CD = 25 teſe : al lato
. Sarà dunque AD = 17 teſe e 3 piedi; al qual
aggiungendo l'altezza DB, o ſia CE del pia-
mento, che è ordinariamente di 4 piedi, ſi ha ve-
'altezza totale AB della fabbrica di 18 teſe ed
piede.

3. Probl. V, *Miſurar un'altezza inacceſſibile* AB.
. 72).

Sol. Nel luogo F si misuri l'angolo ADG formato dalla visuale parallela DG, e dalla visuale DA terminante alla cima della Torre. Sia quest' angolo ADG = 50 gr.

Indi si passi in E per aver la base EF d'una lunghezza sufficiente, affinchè l'angolo CAD non riesca troppo acuto. Sia questa base EF = 40 tese. E si misuri l'angolo visuale ACG = 30 gr.

Or essendo l'angolo esterno ADG = 50 ugual ai due interni opposti ACD + DAC, sarà l'angolo DAC = 20 gr.

Dunque il seno dell'angolo CAD = 20 gr. : al lato CD = 40 tese : : il seno dell'angolo ACD = 30 gr. : al lato AD, il quale sarà = 63 tese e 2 piedi.

Dunque la segante dell'angolo ADG = 50 gr. : alla sua tangente :: il lato DA = 63 tese e 2 piedi: al lato AG, che sarà = 48 tese e 3 piedi; onde aggiungendogli 4 piedi dell'altezza dello stromento, l'altezza totale AB della Torre sarà 49 tese e 1 piede.

754. Probl. VI. *Levar la carta generale d' un Paese.*

Sol. Per levar la carta de' luoghi segnati dalle lettere della (fig. 74), l'oggetto proposto non è altro che di collocar sulla carta i differenti luoghi che vi sono, in maniera che la distanza da un luogo all'altro abbia lo stesso rapporto sulla carta, come sopra il terreno: è dunque far una riduzione dal grande in piccolo. E siccome queste riduzioni non possono farsi che per mezzo di triangoli simili, segue che per levar la carta d'un Paese per mezzo della Trigonometria, convien trovar il valore degli angoli e de' lati formati dalle distanze de' luoghi. Ciò posto

Si stabilisca una base più grande che si può, affinchè i luoghi che devon riferirvisi, sien levati colla maggior esattezza; perciò bisogna evitare gli angoli troppo acuti e troppo ottusi.

Scelti i punti di stazione A e B, se ne cerchi la distanza; ed avendola trovata, situandosi in B si misurì.

ino (facendo uſo della Tavoletta) gli angoli ABC, 3D, ABE, formati dalla baſe AB, e da' raggi vi- li corriſpondenti a varj luoghi che ſi voglion leva-

Si tralaſci il luogo F, perchè l' angolo che for- rebbe colla baſe ſarebbe troppo ottuſo. Si continui iiſurar gli angoli ABG, ABH, e ABK. Si trala- anche il punto L per la ragione poco fa addotta.

er aver ora la poſizione de' luoghi ſegnati, convien liar i raggi che ſi ſon tirati. Fiſſandoſi dunque in ſi miſuri l'angolo BAE, e ſi avrà il punto E, per- nel triangolo ABE eſſendo noti gli angoli EAB, E, ed il lato AB, ſi conoſceranno anche le di- ze AE, ed EB.

oſì per gli altri punti, ſi miſureranno gli angoli D, BAC, BAG, BAH, BAI, BAK, e ſi avran- utte le diſtanze.

eſtan ſolo da trovar i punti omeſſi F ed L. Si ga il lato BE per baſe già nota, e ſi miſurino gli li EBF, BEF, e ſi avran le diſtanze BF, EF. Nella i maniera ſi avranno i punti L ed M col prender aſe nota AC.

rovato il valore di tutti i lati di queſti triangoli, ien rapportarli ſulla carta, col dar a ciaſcuna li- il valore ch'ella deve avere; il che ſi fa facil- te per mezzo d'una ſcala. Rapportate eſattamen- itte queſte poſizioni; ſi potrà continuar a levar a- uoghi ulteriori con tutta facilità, perchè da tut- : parti ſi hanno baſi note.

iando però ſi vuole levar una carta particolare e dettagliata, biſogna che i Direttori inviino perſo- ıteſe ne' Villaggj, per levar le loro ſituazioni, e e, la forma delle principali fabbriche, la poſizio- elle ſtrade, delle cave, delle montagne, colline, ni &c. che poſſon eſſer ne' contorni. Ciaſcun vil- o ſi riduce alla ſcala della carta, e ſi procura che rte più coſpicua, come il campanile della Chieſa, oſitivamente al punto ſegnato ſulla carta.

r le Città, ſe ne forman le piante, che ſi ridu- alla ſcala della carta.

Per

Per i boschi e foreste, s'incomincia dal levar esattamente i Villaggj e le Capanne le più vicine per aver delle basi, delle quali si forma una specie di poligono che circonda il bosco. A questo poligono si rapportano molti punti segnanti i limiti del bosco, per delinearne la figura esterna. Indi si entra nel bosco per considerarne i principali camanini, i ruscelli, le fontane, le case, i castelli, che vi possan essere. Perciò si scelgono nel bosco alcuni punti di posizione i più eminenti, come campanili, case, alberi eccedenti gli altri, e si fanno le operazioni rispetto a qualche eminenza fuori del bosco. Trovati alcuni di questi punti, si può facilmente orientare i differenti luoghi del bosco per mezzo delle note posizioni.

La formazione delle Carte Geografiche è differente; se ne tratterà nelle Matematiche Miste.

APPENDICE II.

Del Compasso di Proporzione.

755. IL *Compasso di Proporzione* è un istromento Matematico, dagl' Inglesi chiamato *Settore*, di grandissimo uso per trovar le proporzioni tra quantità della stessa specie, come tra linee e linee, superficie e superficie, solidi e solidi &c., perciò vien comunemente detto *Compasso di Proporzione*.

756. *Descrizione del Compasso di Proporzione* (fig. 134.). Questo stromento è composto di due righe uguali di metallo o d'altra materia, congiunte insieme con un perno; in guisa che aperte formano una riga, e chiuse si combaciano esattamente. Ciascuna di queste righe è ordinariamente lunga 6 pollici, larga 6 in 7 linee, e grossa circa 2 linee.

In questo stromento son delineate sei principali specie di linee, tre delle quali son in una faccia, cioè 1 la linea delle parti uguali, 2 quella de' piani, 3 quella de' poligoni; e nell'altra faccia sono le tre altre linee, 4 quella delle corde, 5 quella de' solidi, 6 quella de' metalli.

Si

Si mette ancora sull'orlo di un lato una linea, per conoscer il calibro de' cannoni; e all'altro lato un'altra linea per conoscer il diametro e il peso delle palle di ferro da $\frac{1}{4}$ fin a 64 libre.

Uso della linea delle parti uguali.

757. Probl. I. *Dividere una data linea in qualunque numero di parti uguali, per esempio*, in 7.

Si prenda la data linea col compasso ordinario, di cui una punta si metta sopra una divisione della *linea delle parti uguali*, in maniera che questa lunghezza possa esser esattamente divisa per 7; si metta dunque 70, di cui la settima parte è 10. Si apra indi il *compasso di Proporzione*, finchè l'altra punta del compasso ordinario cada sul numero 70 della stessa *linea delle parti uguali* delineata sull'altra gamba. In questa situazione, se col compasso ordinario si misura la lanza che passa dal numero 10 della stessa *linea delle rti uguali* d'una gamba, all'altro numero 10 della ssa *linea di parti uguali* dell' altra gamba; questa ura sarà la settima parte della linea data.

l *Compasso di Proporzione* è fondato sulla propone di Geometria, ove è dimostrato, che *i trian- simili hanno i loro lati omologhi proporzionali*. ieno (fig. 75) AB, AC le gambe del *Compasso*;), AE rappresentino due sezioni uguali che passino centro. Se si congiungon i punti CB, DE, le li- CB, DE saran parallele. Onde i triangoli ADE, inee CC, DE saran parallele. Onde i triangoli E, ACB son simili; dunque i lati AD, DE, AB, , son proporzionali, cioè AD : DE :: AB : BC. nque se AD è il doppio, il triplo, o il quadruplo AB, sarà anche DE il doppio, il triplo, o il qua- o di BC.

vvertasi, che se la linea da dividersi è troppo lunda non poter esser applicata alle gambe del *com- o di proporzione*, se ne dividerà solamente una à o una quarta parte per 7, e il doppio o il qua-

dru-

druplo di queſta linea ſarà la ſettima parte della linea totale.

Probl. II. *Miſurar le linee del perimetro d'un poligono, di cui uno de' lati contien un numero dato di parti uguali.*

Prendaſi la linea data col compaſſo ordinario, e ſi apra il compaſſo di proporzione, finchè la data linea ſia ſopra due numeri della *linea delle parti uguali* ugualmente diſtanti dal centro. Reſtando in queſto ſtato il *compaſſo di proporzione*, ſi metta la lunghezza di ciaſcuna dell'altre linee parallelamente alla prima; i numeri, ove ciaſcuna di loro caderà, eſprimeranno la lunghezza di queſte linee.

Probl. III. *Da una data retta contenente, per eſempio, 120 parti uguali, ſottrarne una minore contenente 25 delle ſteſſe parti uguali.*

Si apra il *compaſſo di proporzione*, finchè le due punte del compaſſo ordinario miſurante la data linea 120, cadano ſopra i numeri 120 di ciaſcun lato. Allora la diſtanza da 25 a 25 darà la linea richieſta.

Probl. IV. *Date due linee, trovar la terza proporzionale.*

Prendaſi col compaſſo ordinario la lunghezza della prima linea data, e ſi metta ſulla *linea delle parti uguali* dal centro fin al numero ove ella termina.

Si apra indi il *compaſſo di proporzione*, finchè la lunghezza della ſeconda linea data ſia rinchiuſa nell' apertura compreſa tralle eſtremità della prima. Reſtando così aperto il *compaſſo di proporzione*, ſi metta la lunghezza della ſeconda data linea ſopra una delle gambe dello ſtromento, incominciando dal centro, e ſi oſſervi ov'ella termina: La diſtanza compreſa tra queſto numero e lo ſteſſo che gli corriſponde all'altra gamba, dà la terza proporzionale.

Se a tre date linee ſi vuol una quarta proporzionale.

Si prenda la ſeconda data col compaſſo ordinario, ed aprendo il *compaſſo di proporzione*, ſi applichi queſta lun-

unghezza all'eſtremità della prima, che ſi è già portata ſulle gambe dello ſtromento dal centro. Reſtando così aperto il *compaſſo di proporzione*, ſi porti la terza linea data ſu la *linea delle parti uguali* incominciando dal centro: l'eſtenſione ch'è tra il numero ov' ella termina ſulle due gambe, è la quarta proporzionale.

Probl. V. *Divider una linea in qualunque data ragione; per eſempio, in due parti, che ſien l'una all' altra come* 40 *a* 70.

Si uniſcanoinſieme i due numeri dati; la loro ſomma è 110. Prendaſi col compaſſo ordinario la data linea ſoppoſta = 165. Si apra lo ſtromento finchè queſta lunghezza 165 ſia da 110 a 110 ſulle due gambe. Reſtando così aperto lo ſtromento, ſi prenda la diſtanza da 40 a 40, come anche quella da 70 a 70: la prima darà 60, la 2.ª 105, che ſaran le parti, che ſi è propoſto di trovare; perchè 40 : 70 :: 60 : 105.

Probl. VI. *Aprir il compaſſo di proporzione in maniera, che le due linee delle parti uguali faccian un angolo retto.*

Si trovino tre numeri, come 3, 4, 5, o i loro equimultipli 60, 80, 100, che poſſan eſprimer i lati d'un triangolo rettangolo. Si prenda col compaſſo ordinario la diſtanza ſullo ſtromento dal centro a 100, e ſi apra lo ſtromento finchè una delle punte del compaſſo poſta ſopra 80, l'altra punta cada ſopra 60 dell' altra gamba; allora le due linee delle parti uguali rinchiudon un angolo retto.

Probl. VII. *Trovar una linea retta ugual alla circonferenza d'un circolo.*

Siccome il diametro d'un circolo è alla ſua circonferenza preſſo a poco come 50 a 157, ſi prenda col compaſſo ordinario il diametro e ſi metta ſulle gambe dello ſtromento da 50 a 50; laſciandolo così aperto, ſi prenda la diſtanza da 157 a 157, queſta ſarà la circonferenza richieſta.

Uſo

Uſo delle Linee delle Corde.

758. Probl. I. *Aprir lo ſtromento in maniera, che le due linee delle corde faccian un angolo d' un numero qualunque di gradi, per eſempio* 40.

Prendaſi ſulla *linee delle corde* la diſtanza dalla cerniera fin a 40, numero de' gradi propoſti. Si apra lo ſtromento finchè la diſtanza da 60 a 60 ſu ciaſcuna gamba ſia uguale alla ſuddetta diſtanza di 40; allora la linea delle corde fa l'angolo richieſto.

Probl. II. *Aperto così lo ſtromento, trovar i gradi della ſua apertura.*

Si prenda l'eſtenſione da 60 a 60, e ſi metta ſulla linea delle corde incominciando dal centro; il numero ove ella terminerà, farà veder i gradi della ſua apertura.

Mettendo de' *Traguardi* ſulla linea delle corde, il *compaſſo di proporzione* può ſervire a miſurar gli angoli ſul terreno, come la ſquadra d' Agrimenſore, il Semi circolo, o il Grafometro.

Probl. III. *Far un angolo di qualunque numero dato di gradi ſopra una data linea.*

Deſcrivaſi ſulla data linea un arco di circolo, di cui il centro è il punto ove deve eſſer la ſommità dell' angolo. Si metta il raggio da 60 a 60. Reſtando in queſta ſituazione lo ſtromento, ſi prenda ſopra ciaſcuna gamba la diſtanza di due numeri, che eſpriman i gradi propoſti. Si porti queſta diſtanza ſull'arco deſcritto. Finalmente ſi tiri una linea dal centro all' eſtremità dell'arco, queſta linea farà l'angolo propoſto.

Probl. IV. *Trovar i gradi, che contien un angolo dato.*

Intorno alla ſommità deſcrivaſi un arco, e ſi apra lo ſtromento, finchè la diſtanza da 60 a 60 ſopra ciaſcuna gamba ſia ugual al raggio del circolo. Si prenda poi col compaſſo ordinario la corda dell'arco, e portandola ſulle gambe dello ſtromento, ſi vegga a qual medeſimo numero di gradi ſu ciaſcuna gamba cadono

le

punte del compasso: questo numero è quello de' li contenuto dall'angolo dato.

robl V. *Dalla circonferenza d'un circolo sottrar- in arco d'una grandezza qualunque.*

praſi lo ſtromento, finchè la diſtanza da 60 a 60 igual al raggio del circolo dato. Si prenda l'eſten- e della corda del numero dato de' gradi ſu ciaſcu- gamba dello ſtromento, e ſi metta ſulla circonfe- za del circolo dato.

er queſto mezzo ſi può iſcriver in un dato circo- in poligono regolare qualunque.

Uſo della linea de' Poligoni.

59. Probl. I. *Iſcriver un poligono regolare in un o circolo.*

Col compaſſo ordinario ſi prenda il raggio del cir- o dato, e ſi aggiuſti al numero 6 della linea de' igoni ſopra ciaſcuna gamba dello ſtromento. Laſci- olo così aperto, ſi prenda la diſtanza de' due ſteſſi meri ch'eſprimon il numero de' lati, che deve aver poligono. Per eſempio, da 5 a 5 per un pentago- , da 7 a 7 per un ettagono &c. Queſte diſtanze rtate intorno alla circonferenza del dato circolo lo videranno in un conſimil numero di parti uguali.

Probl. II. *Deſcriver un poligono regolare, per e- mpio un pentagono ſopra una data linea.*

Col compaſſo ordinario prendaſi la lunghezza della ta linea, e ſi applichi allo ſtromento aperto, finchè da ne' numeri 5 e 5 ſul'e linee de' poligoni. Pren- ſi poſcia ſulle ſteſſe l'intervallo da 6 a 6: queſta ſtanza ſarà il raggio del circo'o, in cui il poligono eve eſſer iſcritto. Se allora dal'e eſtremità della li- ea data ſi deſcrivono con queſto raggio due archi di rcolo, la loro interſezione ſarà il centro del circolo ercato.

Probl. III. *Sopra una data retta deſcriver un tri- ngolo iſoſcele, di cui ciaſcun degli angoli alla baſe ia doppio dell' angolo alla ſommità.*

Si

Si apra lo ſtromento, finchè le eſtremità della linea data cadan ſu i punti 10 e 10 di ciaſcuna gamba. Prendaſi allora la diſtanza da 6 a 6; queſta ſarà la lunghezza di ciaſcuno de' due lati uguali del triangolo cercato.

Uſo delle Linee de' Piani.

760. Probl. I. *Coſtruir un triangolo* ABC *ſimile al triangolo dato* ebc, *e triplo in ſuperficie* (fig. 76).

Col compaſſo comune ſi prenda la lunghezza del lato *eb*, e ſi porti ſulla *linea de' piani* all'apertura del *primo piano*. Reſtando così aperto lo ſtromento, ſi prenda l'apertura del terzo piano, e ſi avrà la lunghezza del lato omologo al lato *eb*. Nella ſteſſa maniera ſi troveranno i lati omologhi ai due altri lati del triangolo propoſto, e di queſti tre lati ſi formerà il triangolo ABC, che ſarà ſimile, e triplo del triangolo dato *ebc*.

Se il piano propoſto ha più di tre lati, ſi ridurrà a triangoli per una o più diagonali. E ſe è un circolo che ſi voglia diminuir o aumentare, ſi farà ſul ſuo diametro l'operazione deſcritta.

Probl. II. *Date due figure piane ſimili, trovar il rapporto, che hanno fra loro* (fig. 77).

Prendaſi qualſivoglia de' lati d'una di queſte figure, e ſi porti all'apertura di qualche piano. Si prenda poi il lato omologo dell'altra figura, e ſi vegga all'apertura di qual piano convenga. I due numeri, ai quali convengon i due lati omologi, eſprimon la ragione, che i lati propoſti hanno fra loro. Se il lato *ab*, per eſempio, della più piccola convien al quarto piano, ed il lato omologo AB dell'altra figura convien al ſeſto piano, i due piani propoſti ſon tra loro come 4 a 6, o come 2 a 3.

Se poſto il lato d'una figura all'apertura d'un piano, il lato omologo non può aggiuſtarſi all'apertura d'alcun altro numero intiero; biſogna metter il detto lato della prima figura all'apertura di qualche altro

piano

ano, finchè si trovi un numero intiero, di cui l'aperura convenga alla lunghezza di questo lato omologo ell'altra figura, affin d'evitare le frazioni.

Se le figure proposte sono sì grandi, che niuno de' ro lati possa applicarsi all'apertura delle gambe del- stromento, si prendano le metà, i terzi, o i quarde' due lati omologhi di dette figure, e paragonanoli insieme si avrà la proporzione de' piani.

Probl. III. *Tra due date rette trovar una media roporzionale.*

Si porti ciascuna delle due date sulla *linea delle pari uguali dello stromento*, per saper il numero che ciascuna ne contiene. Supposto che la minore = 20 parti guali, e la maggiore = 45, si porti questa maggioe all'apertura del 45mo piano, che denota il numero elle sue parti. Restando l'istromento così aperto, si renda l'apertura del 20mo piano, che denota il numeo delle parti uguali della più piccola. Questa apertura che deve contenere 30 delle stesse parti, darà la nedia proporzionale, perchè ∴ 20, 30, 45.

Ma poichè il più gran numero della *linea de' piazi* è 64, se qualcuna delle linee proposte contenesse naggior numero di parti uguali, si potrà fare la detta operazione sulle loro metà, terzi, o quarti &c. in questa maniera; Supposta la minore = 32, e la maggiore = 72, si porti la metà della maggiore all'apertura del 36mo piano, e si prenda l'apertura del 6°; quest'apertura raddoppiata darà la media proporzionale richiesta.

Uso della Linea de' Solidi.

761. Probl. I. *Aumentare, o diminuire i Solidi simili secondo una ragione data.*

Si cerchi, per esempio, un cubo doppio in solidità d'un altro.

Si porti il lato del cubo dato sulla linea de' solidi all'apertura di qualsisia numero, per esempio, da 20 a 20. Prendasi poscia l'apertura d'un numero doppio,

come di 40: quest'apertura è il lato del cubo doppio del proposto.

Se si propone un globo, o sfera, e se ne vuol far un altra 3 volte più grossa, si porti il diametro della sfera proposta all'apertura di quel numero che si vorrà, per esempio, da 20 a 20, si prenda poi l'apertura di 60, questo sarà il diametro di un'altra sfera tripla in solidità.

Se le linee son troppo grandi d'applicarsi all' apertura dello stromento, se ne prenda la metà, il terzo, o il quarto; quel che ne proverrà dopo l'operazione, sarà la metà, il terzo, o il quarto delle dimensioni richieste.

Probl. II. *Dati due corpi simili, trovar il rapporto che hanno fra loro.*

Prendasi uno de' lati de' dati corpi, ed avendolo portato all' apertura di qualche solido, prendasi il lato omologo dell'altro corpo, e veggasi a qual numero de' solidi conviene. I numeri, ai quali questi due lati omologhi convengono, indican il rapporto de' due corpi simili proposti.

Se il primo fosse stato posto all'apertura di qualche solido, ed il lato omologo del secondo non può accomodarsi all'apertura d'alcun numero, si porti il lato del primo corpo all'apertura di qualche altro solido; finchè il lato omologo del secondo si accomodi all'apertura di qualche *numero de' solidi*.

Uso della linea de' Metalli.

762. Probl. I. *Dato il diametro d'un globo, o d'alcuno de' sei metalli, trovar il diametro d' un altro globo dello stesso peso, e di qualunque altro de' suddetti metalli.*

Si porti il dato diametro all'apertura de' due punti della *linea de' metalli*. Aperto così lo stromento, si prenda l' apertura de' punti corrispondenti al *metallo* di cui si vuol fare la palla; quest'apertura sarà il suo diametro.

Se

Se invece di globi si volesse far corpi simili a più acce, convien fare la stessa suddetta operazione, per rovare ciascuno de' lati omologhi l' un dopo l' altro, fin di avere le lunghezze, larghezze, e grossezze de' orpi che si voglion costruire.

In molti *Compassi di Proporzione*, specialmente in uelli costrutti in Inghilterra, son delineate le linee e' Seni, delle Tangenti, e delle Seganti.

Uso delle Linee da' Seni, delle Tangenti, e delle Seganti.

763. Probl. I. *Trovar la corda, il seno, o la tangente di dieci gradi per un raggio di 3 pollici.*

Diensi tre pollici d'apertura allo stromento da 60 a 60 nelle *linee delle corde* delle due gambe. Allora la angente si estenderà da 45 a 45 sulla *linea delle tangenti*, e da 90 a 90 sulla *linea de' seni*; in maniera he la linea delle corde essendo posta ad un raggio qualunque, tutte le altre si trovan poste allo stesso raggio. Perciò se in questa disposizione, si prende col ompasso ordinario l' apertura tra 10 e 10 sulla *linea elle corde*, si avrà la corda di 10 gradi; se si prende apertura da 10 a 10 sulla *linea de' seni*, si avrà il eno di 10 gradi; e se finalmente si prende l' apertura la 10 a 10 sulla *linea delle tangenti*, si avrà la tangente di 10 gradi.

Dunque per mezzo di queste linee si hanno delle cale per differenti raggi; di maniera che avendo un raggio che non ecceda la più grand' estensione dello stromento, si trovan le corde, i seni &c.

Se si vuole la corda, o la tangente di 70 gradi, si può per la corda prender l' apertura della metà di quest' arco, vale a dire 35; questa distanza presa due volte dà la corda di 70 gr.

Per trovar la tangente di 70 gr. per lo stesso raggio, si deve far uso della piccola linea delle tangenti, poichè l'altra si estende solamente fin a 45 gr.; perciò dando tre pollici all' apertura tra 45 e 45 su que-

ſta piccola linea, la diſtanza tra 70 e 70 gr. ſulla ſteſſa linea, ſarà la tangente di 70 gr. per un raggio di tre pollici.

Probl. II. *Trovar la ſegante d' un arco.*

Il raggio dato ſia l'apertura dello ſtromento tra *o* e *o* ſulla *linea delle ſeganti*; allora l'apertura da 10 a 10, o da 70 a 70 ſulle dette linee, darà la tangente di 10, o di 70 gr.

Probl. III. *Dato il ſeno, o la tangente, o la ſegante, trovar il raggio.*

Se la data linea è una corda, ſia l'apertura della linea delle corde tra 10 e 10; allora lo ſtromento ſarà aperto al raggio richieſto, cioè ſarà l'apertura tra 60 e 60 ſulla detta linea. Se la linea data è un ſeno, una tangente, o una ſegante, ſia ella l'apertura del numero dato de' gradi; la diſtanza da 90 a 90 ſu i ſeni, da 45 a 45 ſulle tangenti, da *o* a *o* ſulle ſeganti, darà il raggio.

Uſo del Compaſſo di Proporzione per la Trigonometria.

764. Probl. I. *Data la baſe, e la perpendicolare d' un triangolo rettangolo, trovar l' ipotenuſa* (fig. 78).

Suppoſta la baſe AC = 40 miglia, e la perpendicolare AB = 30; ſi apra lo ſtromento, finchè le due *linee delle parti uguali* faccian un angolo retto. Poi per la baſe prendaſi 40 della *linea delle parti uguali* ſopra una gamba, e per la perpendicolare 30 della ſteſſa linea ſull'altra gamba; allora la diſtanza dal numero 40 ſull' una delle gambe al numero 30 ſull' altra gamba, ſarà la lunghezza dell'ipotenuſa, la quale ſarà = 50 miglia.

Probl. II. *Data la perpendicolare* AB *del triangolo rettangolo* ABC = 30, *e l' angolo* BCA = 37 *gr.*, *trovar l' ipotenuſa* BC.

Si prenda il lato dato AB, e ſi metta da ogni parte ſul ſeno dell'angolo dato ACB; la diſtanza paralle-a del raggio, o da 90 a 90, ſarà l' ipotenuſa BC, la quale miſurerà 50 ſulla *linea de' ſeni.*

Probl.

Probl. III. *Data l'ipotenusa e la base ; trovar la perpendicolare.*

Si apra lo stromento finchè le *date linee delle parti uguali* sien ad angolo retto. Si metta indi la base data sopra una di queste linee dal centro. Si prenda l'ipotenusa, e mettendo una delle sue estremità al punto della base, l'altra estremità cada sulla linea delle parti uguali dell'altra gamba : la distanza dal centro fin a questo punto sarà la lunghezza della perpendicolare.

Probl. IV. *Data l'ipotenusa, e l'angolo* ACB *trovar la perpendicolare.*

La data ipotenusa sia un raggio parallelo ; cioè sia estesa da 90 a 90 sulle linee delle parti uguali; il seno parallelo dell' angolo ACB sarà la lunghezza del lato AB.

Probl. V. *Data la base e la perpendicolare* AB, *trovar l' angolo* BCA.

Si metta il lato AC sulle due facce dello stromento dal centro, e si osservi la sua estensione. Si prenda la perpendicolare data, e si apra lo stromento all'estensione di questa perpendicolare posta alle estremità della base; il raggio parallelo sarà la tangente dell' angolo BCA.

Probl. VI. *In ogni triangolo rettilineo dati due lati coll' angolo compreso tra questi due lati, trovar il terzo lato.*

Sia AC = 20, BC = 30, ACB = 110 gr. Si apra lo stromento, finchè le due linee delle parti uguali faccian un angolo uguale all'angolo dato, cioè di 110 gr.; si mettan i lati dati del triangolo dal centro dello stromento sopra ciascuna delle linee *delle parti uguali*; l'estensione tralle loro estremità è la lunghezza del lato chiesto AB.

Probl. VII. *Dati gli angoli* CAB, ACB, *ed il lato* CB, *trovar la base* AB.

Si prenda il lato CB dato, e si riguardi come il seno parallelo del suo angolo opposto CAB; il seno pa-

rallelo dell' angolo ACB sarà la lunghezza della baſe AB.

Probl. VIII. *Dati i tre angoli d' un triangolo, trovar la proporzione de' ſuoi lati.*

Prendanſi i ſeni laterali di queſti differenti angoli, e ſi miſurino ſulla *linea delle parti uguali*; i numeri che vi corriſponderanno, daran le proporzioni de' lati.

Probl. IX. *Dati tre lati, trovar l'angolo* ACB.

Si mettano i lati AC, CB lungo la *linea delle parti uguali* dal centro, e ſi metta il lato AB alle loro eſtremità: l'apertura di queſte linee è la grandezza dell'angolo ACB.

Probl. X. *Data l'ipotenuſa* AC *d'un triangolo rettangolo ſferico* ABC, *per eſempio, di* 43 *gr.*, *e l'angolo* CAB *di* 20 *gr.*, *trovar il lato* CB (fig. 79)

Facciaſi queſta proporzione, il raggio: al ſeno dell' ipotenuſa = 43 gr.:: il ſeno dell' angolo = 20 gr.: al ſeno della perpendicolare CB. Si metta poi 20 gr. ſulla *linea de' ſeni* dal centro, e queſta ſteſſa eſtenſione ſi metta da 90 a 90 ſulle due gambe dello ſtromento; il ſeno parallelo di 43 gradi, che è la data ipotenuſa, eſſendo miſurato dal centro ſulla linea de' ſeni, darà 13 gr. 30 m. per il lato richieſto.

Probl. XI. *Data la perpendicolare* BC, *e l'ipotenuſa* AC, *trovar la baſe* AB.

Facciaſi queſt' analogia, il ſeno del compimento della perpendicolare BC: al raggio:: il ſeno del compimento dell' ipotenuſa: al ſeno del compimento della baſe. Dunque il raggio ſia un ſeno parallelo della data perpendicolare, per eſempio, di 76° 30', allora il ſeno parallelo del compimento dell' ipotenuſa, per eſempio, di 47 gr., miſurato ſulla linea de' ſeni, ſarà di 49° 25', che è il compimento della baſe cercata, e per conſeguenza la baſe ſarà di 40° 35'.

Uso particolare del Compasso di Proporzione in Geometria.

765. Probl. I. *Far un poligono regolare d' un' aja uguale a qualunque data.*

Suppongasi un pentagono, di cui l'aja = 125 piedi. Si estragga la radice quadrata dal $\frac{1}{5}$ di 125, che sarà = 5. Facciasi un quadrato, di cui un lato = 5 piedi, e per la *linea de' poligoni* si faccia (fig. 80,) il triangolo Isoscele CGD tale che CD possa esser il lato d'un pentagono regolare iscritto in questo circolo, e si abbassi la perpendicolare GE. Continuando le linee EG, EC, si faccia EF ugual al lato del quadrato suddetto, e dal punto F si tiri FH parallela a GC. Ora una media proporzionale tra GE e EF, sarà ugual alla metà del lato del poligono richiesto. Raddoppiandola dunque si avrà il lato intiero. Determinato così il lato del pentagono, è facile descriverlo.

Probl. II. *Far un quadrato ugual ad un dato circolo.*

Dividasi il diametro in 14 parti uguali, servendosi della *linea delle parti uguali*. Allora 12. 4 di queste parti trovate per la stessa *linea*, saranno il lato del quadrato richiesto.

Probl. III. *Trovar il diametro d' un circolo ugual ad un dato quadrato,*

Dividasi il lato del quadrato in 11 parti uguali, e si continui questo lato fin a 12. 4 parti; questo sarà il diametro del circolo richiesto.

Probl. IV. *Trovar il lato d' un quadrato ugual ad un' Ellissi, di cui sien dati i diametri traversi, e conjugati.*

Si trovi una media proporzionale tra il diametro traverso e 'l conjugato, e si divida in 14 parti uguali; $12\frac{4}{10}$ di queste parti saran il lato del quadrato richiesto.

Probl. V. *Descriver un' Ellissi, di cui i diametri abbian un rapporto qualunque, e di cui la superficie sia ugual ad un quadrato dato.*

Sia il rapporto del diametro traverſo al conjugato, come 2 ad 1. Dividaſi il lato del quadrato dato in 11 parti; allora 2 : 1 :: 11 × 14 = 154 : ad un quarto proporzionale, di cui il quadrato è il diametro conjugato richieſto. Poi 1 : 2 :: il diametro conjugato : al diametro traverſo.

Sieno (fig. 81) AB ed ED i diametri dati. Si apra lo ſtromento finchè la diſtanza da 90 a 90 ſulle *linee de' ſeni* ſia = AC. Si divida la linea AC in *linea de' ſeni* da 10 in 10, e da ciaſcuno di queſti ſeni s'inalzino a due parti le perpendicolari. Si apra lo ſtromento finchè la ſua apertura da 90 a 90 ſulla *linea de' ſeni* ſia uguale al diametro conjugato CE: Si prendan i ſeni paralleli di ciaſcun grado delle *linee de' ſeni*, e ſi mettano ſu queſte perpendicolari tirate da loro compimenti nelle *linee de' ſeni* AC. Così ſi avran due punti in ciaſcuna perpendicolare, per i quali deve paſſare l'Eliſſi.

Reſtando lo ſtromento da 80 ad 80 ſulle *linee de' ſeni*, e mettendo una punta di queſto compaſſo in 10 ſulla linea AC, coll'altra punta ſi ſegnino i punti *a*, *m* ſulle perpendicolari che paſſano per queſti; *a* ed *m* ſaran due punti nella perpendicolare, per i quali l'Eliſſi deve paſſare &c.

Uſo del Compaſſo di Proporzione nell'Agrimenſura.

766. Probl. *Data la poſizione riſpettiva di tre luoghi* (fig. 82), A, B, C, *e le diſtanze di ciaſcuno di queſti luoghi ad un quarto* D, *trovar le diſtanze riſpettive fra loro.*

Fatto il triangolo EFG ſimile ad ACB, ſi divida EG in H in maniera che EH : HG :: AD : DC. Nella ſteſſa guiſa EF ſi divida in I, che EI : IF :: AD : DB. Continuando i lati EG, EF, ſia EH—HG : HG :: EH + HG : GK, e EI — IF :: iF :: EI + IF : FM; queſte proporzioni trovanſi facilmente per mezzo della *linea delle parti uguali*. Si tagli poi HK ed IM ai punti L, N, e da queſti punti, come da

da centri colle distanze LH ed IN, si descrivano due circoli intersecantisi in O, dove dalla sommità degli angoli EFG si tirino le rette FO, FO, OG, che avran fra loro la stessa proporzione che le linee AD, BD, DC. Or se le linee EO, FO, GO son uguali alle linee date AD, BD, DC, le distanze EF, FG, EG saran le distanze richieste de' luoghi. Ma se EO, OF, OG son più piccole di AD, DB, DC, si prolunghino finchè PO, OR, OQ sien loro uguali. Allora se si unisconi punti P, Q, R, le distanze PR, RQ, PQ saran le distanze de' luoghi richiesti. Finalmente se le linee EO, OF, OG son più grandi delle AD, DB, DC, si sottraggano delle parti uguali a AD, DB, DC, e si uniscan i punti di sezione per tre linee rette; le lunghezze di queste rette daranno le distanze cercate. Se EH = HG, o EI = IF, i centri L, N saranno infinitamente distanti da H, e da I, cioè ai punti H ed I devon esservi delle perpendicolari elevate su i lati EF, FG, invece di circoli, finchè s'intersechino. Ma se EH < HG, il centro L caderà sull'altro lato della base prolungata; e lo stesso deve intendersi di EI ed IF.

La mirabil invenzione di questo sì utile stromento, che facilita particolarmente la *Projezione ortografica, e stereografica*, è dovuta a quel raro genio di Galileo, autore della maggior parte delle più interessanti scoperte.

Osservazioni sulla Geometria.

767. La voce *Geometria* composta di due parole Greche, significa *Misura della Terra*. Questa etimologia indica quel che ha fatto nascere la Geometria. Imperfetta ed oscura nella sua origine, come le altre Scienze, ella ha incominciato dall' andar a tastoni con misure ed operazioni grossolane, ed a poco a poco si è elevata a quel grado di esattezza, e di sublimità, ove ora è giunta.

768. Le figure, che si considerano in Geometria son forse assolutamente ipotetiche, e non han modello esistente nella natura. Le linee nella natura non

ſono nè perfettamente rette, nè perfettamente curve; le ſuperficie non ſono nè eſattamente piane, nè eſattamente curvilinee, nè vi è naturalmente un circolo perfetto. Or ſe in natura non vi è niente di queſta eſattezza immaginaria Geometrica, a che ſerve dunque la Geometria? Ecco a che ſerve. Se i Teoremi Geometrici non hanno eſattamente luogo nella natura, queſti Teoremi ſervon almeno a trovar con una preciſione ſufficiente per la pratica la diſtanza inacceſſibile d'un luogo all'altro, la miſura d'una ſuperficie, e d'un ſolido; ſervon a calcolare il movimento, e la diſtanza degli Aſtri, ed a predire i Fenomeni celeſti. Per dimoſtrar la verità con tutto il rigore, ſi è obbligato a conſiderar i corpi in uno ſtato di perfezione aſtratta, che realmente non hanno. Se non ſi riguardaſſe, per eſempio, il circolo come perfetto, ci vorrebbero tanti teoremi differenti ſul circolo, quante figure differenti ſi poſſon immaginar accoſtarſi più o meno al Circolo perfetto. Quanto più le figure, e le linee naturali ſi approſſimeranno all' eſattezza delle Geometriche, più ſi accoſteranno alle proprietà dimoſtrate nella Geometria. Ciò baſta per riſponder a due ſpecie di cenſori della Geometria: gli uni ſono gli Scettici, che accuſan la Geometria di falſità, perchè ſuppone quel che realmente non eſiſte, linee ſenza larghezza, ſuperficie ſenza profondità &c.. Gli altri ſon gl' ignoranti delle Matematiche, che diſprezzano quel che non ſanno, e ſtiman inutili, e come giuochi di ſpirito inapplicabili alla Fiſica le verità Geometriche. E' una ſpecie di conſolazione taſſar d'inutile quel che non ſi sà.

769. L'utile della Geometria non è ſolo riſtretto alle Scienze ed alle Arti, ma ſi eſtende principalmente a formar la retta ragione, ed a preparar la pubblica felicità. Poichè aſſuefacendoſi la mente a ſtabilire principj veri e chiari, a dedurne immediatamente conſeguenze incontraſtabili, a dimoſtrar tutto con rigore, ſi abitua in tutto alla metodica ricerca del vero, e diffondendoſi queſto ſpirito geometrico nella ſocietà, ſi con-

converte ben presto in Filosofico, e da per tutto si va ad investigare il vero, il giusto, l'utile, e l'onesto.

Non è però da lusingarsi, che la Geometria raddrizzi gli spiriti naturalmente storti: uno spirito senza giustezza, non è per questo studio. La Geometria non raddrizza che gli spiriti dritti, e gli spiriti dritti son fatti per la Geometria.

770. Si è già veduto, che la Geometria Elementare non considera che le proprietà delle linee rette, delle linee circolari, delle figure, e de'solidi più semplici, cioè delle figure rettilinee o circolari, e de'solidi terminati da queste figure. Il circolo è la sola figura curvilinea di cui si parla negli elementi della Geometria; la semplicità della sua descrizione, la facilità con cui le proprietà del circolo si deducono, e la necessità di servirsi del circolo per differenti operazioni semplicissime, come per inalzar una perpendicolare, per misurare un angolo &c.; tutte queste ragioni han determinato a far entrar il circolo, ed il circolo solo negli elementi di Geometria.

771. Le proposizioni della Geometria Elementare si son trattate *sinteticamente*, e senza calcolo algebraico, perchè di questi due metodi si deve impiegar quello, che facilita più le dimostrazioni: Or la *Sintesi* rende più facile la Geometria Elementare, siccome l'Analisi facilita più la Scienza dell'altre Curve.

Tutte le altre Curve differenti dal Circolo, le quali sono di grandissimo uso nelle Scienze, e nelle Arti, trattate analiticamente, o per mezzo del Calcolo Infinitesimale, forman la *Geometria Trascendente*. Il Calcolo Integrale poi applicato alla quadratura, e alla rettificazione delle Curve, fa la *Geometria Sublime*.

Cartesio è stato il primo ad applicar alla Geometria il Calcolo Algebraico, per cui d'allora in poi fece questa Scienza gran progressi ignoti all'Antichità; e questi nuovi progressi han prodotto il Calcolo Infinitesimale, che ha portato la Geometria al maggior grado di elevazione.

LI-

LIBRO IV.

DELLA GEOMETRIA TRASCENDENTE

CAPITOLO I.

Delle Curve in Generale.

772. SI chiama *Funzione di una quantità* ciò che la rende compoſta, o ciò che impediſce di conſiderarla come ſemplice.

Per eſempio, chiamaſi in generale Funzione di a, una delle potenze qualunque a, una radice qualunque, una ſomma, una differenza, un prodotto, un quoziente &c. della quantità a.

773. Per determinare la poſizione d' un punto ſopra un piano, la maniera la più comoda, e la più uſitata tra i Geometri, è di rapportarlo a due rette differentemente ſituate ſu queſto piano; il che ſi fa facilmente, lorchè ſi conoſce la ſua diſtanza da ciaſcuna di queſte rette, e da qual parte egli è ſituato riguardo a loro.

Se il punto M (fig. 84) doveſſe eſſer poſto al di ſotto della retta AS data di poſizione, ed eſſerne lontano d'una quantità uguale a DE, e a ſiniſtra della retta SF in una diſtanza uguale a BC: allora tirando al di ſotto di AS una retta GH, che le ſia parallela, e tale che tutte le perpendicolari tirate fra loro ſien uguali a DE, è chiaro che il punto M deve eſſer in qualche parte di queſta retta. Tirando ſimilmente a ſiniſtra di SF una parallela KI in maniera, che tutte le perpendicolari tirate fra loro ſien uguali a BC, e ſulla quale per conſeguenza il punto M deve ancora trovarſi; è chiaro che queſto punto deve eſſer nell' interſezione delle due rette KI, GH.

774. Se nel dare la diſtanza dal punto M alle due rette AS, SF, non ſi diceſſe da qual parte queſto punto

to debba esser posto riguardo a loro, la sua posizione sarebbe indeterminata; perchè si troverebbe ugualmente ai quattro punti M, *m*, *n*, K. Per evitare questa ambiguità, i Geometri son convenuti di disegnare le posizioni opposte per i segni + e —. Per esempio, la retta AS servendo di termine, per rapportarvi le rette che son al di sopra o al di sotto, si chiameran le une *positive*, e l'altre *negative*; e la retta SF servendo di termine per distinguer le linee che son a sinistra, da quelle che son a destra, si chiameranno le une *positive*, e le altre *negative*. La scelta è da principio arbitraria, ma fatta una volta, non si deve più variarla in tutti i calcoli algebraici applicati alla stessa figura.

775. Se dal punto M, come di sopra si è determinato, si abbassano le perpendicolari MT, MR, i triangoli rettangoli MTV, MPR sono simili; perchè se dagli angoli retti TMP, VMR si toglie l'angolo comune TMR, resta TMV = PMR. Si ha dunque MV : MP :: MT o DE : MR o BC. Dunque alle perpendicolari MT, MR, che misurano le distanze date, si avrebbe potuto sostituire le parallele MV, MP, e determinar il punto M con queste condizioni, ch'egli debba esser al di sotto di AS, e a sinistra di SF; e che le parallele a AS, e a SF tirate da questo punto debban esser uguali l'una a MP, e l'altra a MV. Perchè avendo preso sopra SP al di sotto di AS una parte SP = MV, e per P avendo tirato a AS la parallela GH, non resterebbe da far altro che tirarvi da P una retta uguale a PM; il punto M sarebbe determinato come sopra.

776. Si considera ordinariamente una curva piana, come una serie di passi uguali fatti da un punto mobile sopra un piano; e per poter ragionare sulla natura, e proprietà di questa curva, bisogna che questa serie di passi sia una serie di punti M, M (fig. 85) determinati d'una maniera uniforme riguardo alle due rette AS, SF differentemente poste su questo piano; o che qualche stessa funzione di ciascuna retta MP sia a qual-

qualche ſteſſa funzione della retta SP corriſpondente, in un certo rapporto coſtante. Biſogna dunque perciò che il punto mobile, che deſcrive la curva, ſi muova ſeguendo ſempre una ſteſſa certa legge negli angoli infinitamente piccoli de' ſuoi traviamenti.

L'Equazione Algebraica, che eſprime queſta legge, o il rapporto coſtante delle funzioni di ciaſcuna MP a ciaſcuna SP, ſi chiama *Equazione della Curva*. La retta SF, cui terminano tutte le parallele MP, MP, ſi chiama la *Linea delle Aſciſſe*, perchè diconſi *Aſciſſe*, o *tagliate* le parti SP, SP &c. di queſta linea, compreſe dal punto determinato S (che ſi chiama l'*Origine* delle *Aſciſſe*) per cui paſſa la retta AS, alla quale tutte le rette (che ſi chiaman *Ordinate* o *applicate*) devon eſſer parallele. Donde ſi vede, che purchè ſi ſappia la poſizione d' una delle ordinate, e l'origine delle aſciſſe, la retta AS è inutile.

777. Per maggior dilucidazione, ſuppongaſi che sMS (fig. 64 n. 2) ſia un ſemicirculo, di cui Ss ſia il diametro. Si sa (529) che ſe da un punto qualunque M vi ſi abbaſſa la perpendicolare MP, ſi ha $PM^2 = SP \times Ps$. Se dunque ſi prende Ss per la linea delle aſciſſe, il punto S per la loro origine, l'equazione del circolo deve eſprimere che il quadrato di ciaſcuna ordinata MP è ugual al prodotto di ciaſcuna aſciſſa SP per il reſto Ps del diametro. Onde facendo $Ss = a$, $MP = y$, $SP = x$, (ſi oſſervi che ordinariamente ſi diſegnano le ordinate delle curve per y, e le loro aſciſſe per x, così che nel diſcorſo familiare ſi dice le x e le y d'una curva, per dire le aſciſſe e le ordinate) ſi ha $Ps = a - x$; e $y^2 = ax - x^2$ e l'equazione del circolo, perchè ella eſprime l'uguaglianza coſtante tra una ſteſſa funzione di ciaſcuna ordinata (ch'è il ſuo quadrato) e una ſteſſa funzione d'un' aſciſſa corriſpondente (ch'è il ſuo prodotto pel reſto del diametro).

778. Quindi ſi vede, che ciaſcuna ordinata d' una curva, e ciaſcuna aſciſſa corriſpondente, devon eſſer

due

due quantità indeterminate o variabili, ma deducibili l'una dall'altra per le diverse supposizioni di grandezza, che si fa all'una de'due, e per le grandezze determinate o costanti che son contenute nell'equazione, onde si può facilmente descriver la curva.

Per esempio, nell'equazione del Circolo, a deve esser una quantità costante o invariabile. Se dunque $a = 10$, e se sopra Ss si prendon quante ascisse SP si vuole (per maggior comodità si prendon in progressione aritmetica, o in maniera che gl' intervalli PP sien uguali), come se si facesse SP o x successivamente $= 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, si troverà per l'equazione $y^2 = ax - x^2$, che le ordinate corrispondenti MP o y, sono successivamente, $0, 3, 4, \sqrt{21}, \sqrt{24}, 5, \sqrt{24}, \sqrt{21}, 4, 3, 0$; così che inalzando da ciascun punto P delle perpendicolari a Ss, e facendole successivamente uguali a $3, 4, \sqrt{21}$ &c., si avran tanti punti M, per i quali si potrà delinear una curva, che sarà un semicircolo descritto con tanta maggior esattezza, quanto men lontane saran fra loro le ordinate MP.

Per maggior chiarezza di ciò, si osservi.

1.° Che facendo $x = 0$, sarà $y = 0$; perchè essendo $y^2 = ax - x^2$, e $x = 0$, sarà $ax - x^2 = 0$, dunque $y = 0$. Dunque al punto del circolo, dove non abbia luogo alcuna ascissa, non avrà luogo neppur un'ordinata. Ma al punto S non ha luogo alcuna ascissa, dunque non vi ha nemmen luogo alcun' ordinata.

2.° Lorchè $x = 1$, sarà $y = 3$; perchè se $y^2 = ax - x^2$, sarà $y^2 = 10 - 1 = 9$; dunque $y = 3$.

3.° Quando $x = 2$, sarà $y = 4$; perchè essendo $y^2 = ax - x^2$, sarà $y^2 = 20 - 4 = 16$: dundue $y = 4$. E così degli altri.

E poichè l'equazione $y^2 = ax - x^2$ dà anche le radici negative $-3, -4, -\sqrt{21}, -\sqrt{24}$ &c., ben si vede che se sul prolungamento di ciascuna MP si pren-

ſi prendono (774) a deſtra di Ss tante $Pm = PM$, ſi avrà il circolo intiero $SMsm$.

Si vede ancora che ſe ſi aveſſe voluto prendere SP più grande di Ss, o $x > a$, l'ordinata corriſpondente ſarebbe divenuta immaginaria, o impoſſibile; perchè $ax - x^2$ ſarebbe divenuta una quantità negativa, di cui la radice quadrata è impoſſibile. Onde il ſemicircolo è aſſolutamente terminato in s, e il ramo SMM non può diſcendere più baſſo.

779. Reciprocamente. Poichè tutte le ſoluzioni poſſibili di un problema indeterminato (188) ſon rinchiuſe in un'equazione contenente due incognite, ſi può ſupporre che tutti i valori poſſibili d'una di queſte incognite ſieno rappreſentate ſucceſſivamente da una ſerie d'aſciſſe d'una curva, e tutti i valori corriſpondenti dell'altra incognita dalle ordinate della ſteſſa curva; così che ciaſcun punto della curva ſia tale, che la ſua ordinata e la ſua aſciſſa rappreſentan una delle ſoluzioni eſatte del problema indeterminato eſpreſſo da queſta equazione.

780. I differenti gradi dell'equazioni ſervon a ſtabilir i differenti *generi* o *ordini* di linee. Ciaſcuna combinazione di funzioni delle due indeterminate d'un equazione d'un certo grado ſerve a diſtinguere tante ſpecie di linee rinchiuſe nel genere indicato dal grado; il numero di queſte combinazioni poſſibili e realmente differente determina il numero di queſte ſpecie. Così ſi chiaman *Linee del primo genere* o del *primo ordine* quelle che ſon prodotte da un'equazione del primo grado; *linee del ſecondo genere* o del *ſecondo ordine* quelle che riſultano da un'equazione del ſecondo grado: e così delle altre.

Non vi è che la linea retta che ſia del primo genere; non vi ſono che le quattro Sezioni Coniche che ſieno del ſecondo; ve ne ſono preſſo 80 del terzo ordine, e a proporzione un maggior numero del quarto &c. Queſto numero di ſpecie non ſi deve intendere che delle Curve, che ſi chiamano *piane*, e *geometriche*.

che. Curve *Geometriche* o *Algebraiche* diconsi tutte quelle, delle quali il rapporto delle ascisse alle ordinate è, o può esser espresso da un'equazione algebraica. Quelle Curve poi che non possion determinarsi per mezzo di equazione algebraica, chiamansi Curve *Meccaniche*, o *Trascendenti*: Tali son quelle Curve, ove le ordinate, e le ascisse non essendo rette, o essendo rette, si è obbligato far entrare nella loro espressione lunghezze d'archi di circolo; e se la Curva non è piana, vale a dire se il punto che l' ha formata, non si è mosso in uno stesso piano, la Curva si chiama *Curva a doppia Curvatura*.

781. Se la curva piana (fig. 85) MS*m* geometrica o meccanica, è tale, che le ordinate, essendo prolungate al di là della linea SF delle ascisse fin alla curva *m*, si ha sempre P*m* = PM; questa linea SF si chiama *un diametro*; il punto S della curva per dove ella passa, si chiama l' *origine del diametro*; questo punto è ordinariamente l'origine delle ascisse. E se le ordinate son perpendicolari a questo diametro, si chiama allora l' *asse della curva*.

782. Tutte le curve che hanno un diametro, e che per conseguenza hanno riguardo a quello due rami SMM, *Smm* che si estendono da una parte e l' altra nella stessa maniera, han questa proprietà, che la parallela SA alle ordinate tirata dall'origine S del diametro passa sempre in mezzo tra le due porzioni della doppia ordinata terminata da una parte e l'altra alla curva; se s'immagini che M*m* scorra parallelamente a se stessa, fin che arrivi in S, allora il punto S sarà nel mezzo tra le due parti infinitamente piccole di M*m*, che saranno terminate alla curva, e perchè M*m* entra infinitamente poco nella curva, le sue parti terminate alla curva, saran le due metà del lato infinitamente piccolo della curva che è in S. Dunque M*m* sarà allora confusa con questo lato. Ora una tangente non è altro che il prolungamento finito del lato infinitamente piccolo, ch'è in S; Dunque ella è tangente alla curva in questo punto.

783. Quando ua diametro, o un asse SP (fig. 129, 130) è rincontrato da una tangente MT, la parte TP di questo diametro compresa tra il punto di rincontro T, e l'ordinata MP a questo diametro tirata dal punto del contatto M, si chiama *sottangente*. E se dallo stesso punto del contatto M s'innalza alla tangente MT una perpendicolare o *normale* MN, la parte PN compresa tra l'incontro dell'ordinata a quello della normale, si chiama la *superpendicolare*, o *sunnormale*.

784. Quando una curva non è rientrante rapporto al suo diametro, vale a dire, quando i suoi rami se ne allontanano sempre, allora si può menare da tutti i suoi punti M, M &c. (fig. 85) le rette MQ, M Q parallele al diametro SP, fin al rincontro della retta SQ tirata dall'origine S delle asciſſe parallelamente alle ordinate, cosicchè queste rette MQ, MQ sieno tutte al di fuori della curva. In questo caso è chiaro, ch'elle formano de' parallelogrammi simili PQ, PQ &c., e si posson prendere le rette MQ, MQ per le asciſſe SP, SP; e le rette SQ, SQ per le ordinate. Queste sorti d'ordinate si chiaman *coordinate*, il parallelogrammo PQ si chiama il *parallelogrammo delle coordinate*, e l'angolo QSP si chiama l'*angolo delle coordinate*.

785. Poichè si suppone che le curve non sono che passi uguali d'uno stesso punto che devia a ciascun passo, seguendo una certa legge costante nella variazione degli angoli infinitamente piccoli de' suoi deviamenti, siegue:

1.° *Che non si può considerare in Geometria linea mista*, cioè in parte retta, e in parte curva; poichè allora non vi sarebbe legge costante del cammino del punto che la descriverebbe.

786. 2°. *Che il contatto d'una curva con una retta non può farsi che in un sol punto*, ovvero *che una retta non può toccar una curva in due o tre punti contigui*; perchè se ciò fosse possibile, il punto descrivente avrebbe fatto due o tre passi senza deviare,

re, il che avrebbe interrotta la legge de' ſuoi deviamenti.

787. 3.° *Che la curvatura d' una curva è tanto maggiore, quanto gli angoli de' ſuoi deviamenti ſon più grandi a proporzione della grandezza de' paſſi del punto mobile che l' ha deſcritta.*

Per eſempio, un circolo è una curva deſcritta da un punto, che ha deviato ugualmente a ciaſcun paſso uguale; e perchè un grande e un piccolo circolo ſon due poligoni regolari d' uno ſteſſo numero di lati e di angoli, ma de' quali quelli del più piccolo circolo ſon più piccoli di quelli del più grande in ragione de' loro raggi; gli angoli de' deviamenti, o i ſupplementi degli angoli interni formati dai lati del circolo più grande, ſon uguali agli angoli de' deviamenti de' lati del più piccolo; è dunque evidente che ciaſcuno de' lati del circolo grande è tanto meno diſcoſto dalla linea retta, quanto egli è più grande, o quanto più grande è il raggio del circolo, poichè il punto che deſcrive il circolo grande, fa de' paſſi in linea retta tanto più grandi. Dunque *la curvatura d' un circolo è tanto più piccola, quanto più grande è il ſuo raggio*, ovvero *ella è in ragion inverſa del ſuo diametro*. Donde ſiegue che *la grandezza del raggio d' un circolo è una quantità propria da dar un' idea della ſua curvatura*.

788. I principali problemi da proporſi, lorchè ſi ha una curva da eſaminare, conſiſtono: 1.° A cercare in qual maniera ſi deve deſcriverla, ſe ſe ne conoſce l' equazione; o reciprocamente, qual equazione ſi deve dedurre dalla ſua coſtruzione nota. 2.° Come vi ſi può menar una tangente in un punto dato. Ciò è lo ſteſſo che cercare, qual' è la poſizione del lato infinitamente piccolo, ove queſto punto è ſituato; ovvero qual' era la direzione del cammino del punto mobile nel deſcrivere queſto lato infinitamente piccolo. Queſta ricerca conduce naturalmente a quella del punto del contatto, che ſi determina facilmente dai valori della ſottangente, o della normale, o della ſunnorma-

le. 3.° Qual' è la curvatura della curva in un piccolo arco. Perciò si suppone che per i tre punti infinitamente prossimi formanti quest' arco, si abbia fatto passare la circonferenza d'un circolo, nella quale per conseguenza l'arco della curva è confuso, e il raggio di questo circolo determinato per mezzo dell'equazione, o delle proprietà della curva, dà la curvatura di quest'arco. Questo raggio si chiama *raggio di curvatura*, *raggio osculatore*, *raggio della sviluppata*. 4.° Si cerca qual'è la Quadratura della curva, cioè qual' aja o superficie è rinchiusa nella curva intiera, s'è chiusa, o in una delle sue parti date; come se si domandasse la superficie compresa tra l'arco LM (fig. 86) d'una curva, una parte CP del suo diametro, e le due sue ordinate MP, CL, delle quali l'una come CL parte dall'origine C delle x dell'equazione della curva. Perciò si suppone che da questa origine sienvi disposti parallelamente all'ordinata CL o MP tanti parallelogrammi *pqmn* terminati alla curva da una parte, e dall'altra alla linea delle ascisse CP, quanti punti vi sono da C fin a P; tutti questi parallelogrammi, che son d'un numero infinito, son dunque sì stretti, che le rette *pm*, *qn* son confuse, e possono esser presi per semplici ordinate al diametro CP. Or CP, essendo l'ultima x, tutte le x comprese tra l'origine C, e che corrispondono a ciascuna di tutte queste ordinate comprese tra CL, PM, crescono secondo questa serie o progressione aritmetica $1\frac{x}{\infty}, 2\frac{x}{\infty}, 3\frac{x}{\infty}, 4\frac{x}{\infty} \ldots \infty\frac{x}{\infty} = x$. Perchè la prima y infinitamente prossima a CL ha per suo x una parte infinitamente piccola di CP, cioè, $1\frac{x}{\infty}$; la seconda ha il suo x doppio del precedente, poichè ella corrisponde al secondo punto compreso tra C e P, e contatto da

da C; questo x è dunque $2\frac{x}{\infty}$; la terza y ha il suo x triplo, o $3\frac{x}{\infty}$; e così delle altre. Ond'è evidente, che si possono rappresentare tutte queste x per la serie infinita $\frac{x}{\infty}$. 1. 2. 3. 4. .... x. Or l'equazione della curva non racchiudendo altre indeterminate che x e y, si possono trarne tanti valori d'y, quanti se ne possono supporre a x, cioè quanti son i termini di questa serie. Si avrà dunque con questo mezzo una serie infinita d'ordinate comprese tra CL e PM; e se si può sommare questa serie, si avrà la quadratura esatta dell'aja CLMP; se non si può sommare, e se questa serie è abbastanza convergente, non si avrà la quadratura che a un dì presso, e tanto più esattamente, quanti più termini consecutivi di questa serie di ordinate effettivamente si sommeranno.

Per riuscire in tutte queste ricerche, s'impiegan ordinariamente due specie di calcoli, l'uno è il calcolo Analitico ordinario, e l'altro è l'Infinitesimale, di cui si daranno i principj in appresso.

CAPITOLO II.

DELLE SEZIONI CONICHE.

Della Natura, e delle Proprietà principali delle Sezioni Coniche descritte sopra un piano, e considerate rapporto ai loro assi.

789. LA *Sezione Conica* è una linea curva nata dall'intersezione d'un piano con un Cono. Un piano non può tagliar un Cono, che nelle cinque maniere seguenti.

1.° Se lo taglia per la sua punta, perpendicolarmente

te alla sua base, si avrà un *Triangolo*. Questa sezione che non è curva, non si considera fralle Coniche.

2.° Se lo taglia parallelamente alla sua base, si avrà un *Circolo*, il quale nemmeno si considera fralle Sezioni Coniche, poichè se n'è trattato nella Geometria Elementare.

3.° Se lo taglia obliquamente alla sua base, e parallelamente a uno de' lati del Cono, si avrà una Parabola (fig. 101.)

4.° Se lo taglia obliquamente alla sua base, ed ai suoi lati, in maniera che la sezione tagli i due lati del Cono, si avrà un' Ellissi. (fig. 102)

5.° Finalmente se lo taglia obliquamente alla base, ed ai lati del Cono, in maniera che la sezione prolungata in alto vada a tagliar un altro Cono opposto, la sezione di ciascun Cono si chiama *Iperbole*, e queste due curve insieme diconsi *Iperboli opposte*. (fig. 103)

Queste tre Curve son quelle che propriamente fanno l'oggetto delle Sezioni Coniche.

Si chiama Sezione Conica ogni linea, in cui sieno sempre nella stessa ragione le due distanze di ciascuno de' suoi punti, l'una MG (fig. 88, 89, 90) dalla stessa retta AG (che si chiama la *direttrice della sezione*); e l'altra MF da uno stesso punto F posto fuori di questa retta AG (questo punto F si dice il *foco della sezione*.)

790. La sezione è un' *Ellissi*, se MG è maggiore di MF; è *Iperbole* se MG è minore di MF; *Parabola* se MG = MF; *Circolo* se MG è infinita rapporto a MF; e *retta* se MG è infinitamente piccola rapporto a MF.

Non si considerano qui che i tre primi rapporti, che dan le Curve propriamente dette *Sezioni Coniche*.

791. Una retta FA che passa pel foco F, e che è perpendicolare alla direzione AG, si chiama *l'asse principale* della sezione. Il punto S compreso fra F e A, e che

e che è tale che SA sia a SF nel rapporto costante proprio alla sezione, si chiama il *vertice* della sezione, o l'*origine*, l'*estremità* dell'asse principale.

792. Donde siegue, *che una Sezione Conica è un' Ellissi, un' Iperbole, o una Parabola, secondo che il suo vertice è più vicino, lontano, o tanto lontano dal foco quanto la direttrice.*

793. La direttrice AG essendo data di posizione, col foco F, e col vertice S, per trovare quanti punti si vuole della sezione, ed in conseguenza per descrivere la curva, bisogna dal vertice S inalzare perpendicolarmente all'asse una retta SB = SF, tirar la retta indefinita ABD, e menate tante rette PD, PD, PD &c. quante perpendicolari si vorranno all'asse, e se si vuole tante di quà quante di là del vertice S, bisogna segnare su ciascuna di queste rette, sempre ch'è possibile, un punto M tale, che ciascuna FM = PD; bisogna prender dall'altra parte dell'asse sul prolungamento di ciascuna PD un punto *m*, tale che sia P M = P*m*, e far passar una curva per tutti i punti M, M, *m*, *m*, la quale sarà la sezione determinata. Perchè se da uno di questi punti si abbassa sulla direttrice la perpendicolare MG, a causa de' triangoli simili ASB, APD, si ha DP o FM: PA o MG :: SB o SF: SA.

E perchè i punti *m*, *m*, son posti sulle stesse rette, e nelle stesse distanze dall'asse, come i punti M, M; quel che si dirà del ramo SMM, deve intendersi anche del ramo *Smm*, che gli è uguale e simile, e che ha per conseguenza tutte le stesse proprietà. Da questa costruzione si deducon facilmente le proprietà seguenti.

794. I. *Nella parabola l'angolo* SAB *è di* 45 *gradi, nell' Ellissi è più piccolo, e nell' Iperbole è più grande.*

795. II. Sarà sempre possibile determinare sulle PD i punti M della curva, finchè le FP saran minori delle PD; perchè le PD devono (793) esser uguali alle FM, le quali devon esser le ipotenuse de' triangoli ret-

tangoli FPM, e per conſeguenza maggiori de' lati FP. Donde ſi vede, che ſe una retta FP foſse uguale alla retta PD corriſpondente, il punto M caderebbe ſul punto P ch' è nell' aſse, e che ſe le FP, ſon maggiori delle loro PD, è impoſſibile determinar i punti M. Ciò poſto ...

Nell' Eliſſi (fig. 88) le rette AP creſcono più rapidamente che le loro PD, a cauſa che AS è maggiore di SB (793); dunque le rette FP che ſon al di là del foco F riguardo al vertice S, devon ben preſto uguagliare, poi ſorpaſsare le loro corriſpondenti DP. Sia $FP^{III} = P^{III} D^{III}$, allora il punto M^{III} cade ſull' aſse, e vi chiude la curva. Perchè ſe ſi prendeſse una PD al di là di $P^{III} D^{III}$, o anche tra A e SB, ella ſarebbe ormai troppo corta per potervi ſegnare un punto M tale che FM = PD. Dunque l' Eliſſi *è una curva, di cui i rami* SMM, *Smm vanno da principio ſcoſtandoſi da una parte e l' altra dell' aſſe, poi ſi accoſtano, e ſi raggiungon in* s, *così che il ſuo aſſe principale è terminato in queſto punto, che divien un altro vertice dell' Eliſſi.*

796. Nell' Iperbole (fig. 89) a cauſa di AS più piccolo di SB, le rette AP creſcon meno delle loro corriſpondenti PD; onde veruna FP preſa al di là di F rapporto alla direttrice, non può divenir uguale alla ſua PD, coſicchè *i rami* SMM, *Smm dell' Iperbole ſi allontanan all' infinito da una parte e l' altra dell' aſſe* SP. Se avendo prolungato BA verſo H, ſi prendono delle FP di là della direttrice, elle ſon da principio più grandi delle loro PD; ma ſiccome queſte PD creſcono più rapidamente delle loro FP, ſi giungerà preſto ad averne una come $FP^{III} = P^{III} D^{III}$, indi ſi avranno delle FP minori delle loro PD. Or a cauſa di $FP^{III} = P^{III} D^{III}$, il punto P appartiene all' Iperbole, poichè allora i triangoli rettangoli ſimili $D^{III} P^{III} A$, ASB danno queſta proporzione $P^{III} A : P^{III} F$, o $P^{III} D^{III} :: AS : SB$. E a cauſa che le PD che ſon al di là di $P^{II} D^{III}$ creſcon ſempre, e divengono vieppiù grandi riguardo alle loro FP, ſi poſſon

ſe-

ſegnarvi i punti μ tali che le Fμ ſien uguali a queſte PD: il che formᵃ da una parte e l'altra dell'aſse due nuovi rami Iperbolici infiniti, che appartengon al foco F, e alla direttrice AG, e la retta SP$^{\mu\mu}$, o Ss divien un aſse comune e determinato di lunghezza tra i vertici S, s di queſte due Iperboli oppoſte.

797. Nella Parabola (fig. 90) a cauſa di AS = SB, e per conſeguenza di AP = PD, le FP preſe di qua del punto S rapporto alla direttrice, ſon neceſſariamente più lunghe delle loro PD, e le FP che ſono al di là, ſon ſempre più corte. Dunque ſi può aver un' infinità di punti M ſopra tante PD, che ſon al di là del vertice S: E la Parabola *è una curva compoſta ſolamente di due rami uguali, che hanno un corſo infinito allontanandoſi ſempre più dall' aſſe*. E' facile il metodo meccanico di deſcriver la Parabola per mezzo del moto continuo.

Si collochi ſopra un piano (fig. 92) la riga BC, ed una ſquadra GDO in maniera che uno de' ſuoi lati poſſa ſcorrere liberamente ſulla riga. Si prenda poſcia un filo ugual al lato DO della ſquadra, ed uno de' ſuoi capi ſi fiſſi in O, cioè al fine del lato DO di eſſa ſquadra; e l' altro capo del filo ſi fiſſi in qualche punto immobile F del piano, ſu cui ſi vuol deſcrivere la Parabola. Ciò poſto, ſi faccia ſcorrer il lato DG della Squadra lungo la riga, tenendo ſempre una porzione del filo fermamente unito alla ſquadra per mezzo d'uno ſtile M. La curva AMX deſcritta nel ſuo movimento dallo ſtile, ſarà un ramo della Parabola. Si faccia poi lo ſteſſo dall'altra parte, e ſi avrà l'altro ramo. In fatti eſſendo la lunghezza del filo = DO, è chiaro che la diſtanza del punto immobile F da qualunque punto M della curva, cioè la porzione del filo che ſi è ſviluppata dalla ſquadra, ſarà = MD = AP + AE = AP + AF. Sarà dunque il punto F il foco, e la curva deſcritta una Parabola, che avrà il Parametro = 4AF.

798. III. Data (fig. 88, 89, 90) la direttrice AG, il foco F, e il vertice S d' una ſezione conica, per

ſa-

ſapere s' ella deve aver un aſſe determinato, e per conſeguenza un altro vertice *s*: conviene pel foco F far paſſare una retta indefinita FH, che faccia coll' aſſe un angolo di 45 gradi; e dal punto H, ove ella incontra la retta AB (prolungata ſe biſogna) abbaſſare ſull'aſſe la perpendicolare H*s*, che terminerà l' aſſe in *s*, e darà l'altro vertice della ſezione. Perchè allora il triangolo rettangolo F*s*H è iſoſcele; dunque F*s* = *s*H, e ſi ha *s*A : *s*H o *s*F :: SA : SB o SF. Dunque il punto *s* è un punto della curva, che è nel ſuo aſſe; dunque è il vertice della ſezione.

799. Donde ſi vede che *l' Eliſſi, e l' Iperbole han ſempre un aſſe Ss determinato di grandezza*. Queſt' aſſe termina nell' Eliſſi al di là del foco F rapporto alla ſommità *S*, perchè l'angolo SAB è minore di 45 gradi (794). E nell' Iperbole termina all' oppoſto, perchè l'angolo SAB è maggiore di 45°. Ma *nella Parabola l' aſſe è infinito*, perchè FH è parallela a AB, nè può rincontrarla che ad una diſtanza infinita da una parte o l' altra verſo A, o verſo D.

800. IV. Se ſul prolungamento dell' aſſe *Ss* ſi prende *sa* = SA (fig. 88. 89.), e ſe ſu quello di P''' D''' ſi prende *sb* = SB, la retta indefinita *abd* ſarà parallela a ABD a cauſa degli angoli alterni uguali SAB, *sab*; e le parallele D*d*, D*d* &c. ſaranno tutte uguali all' aſſe principale *Ss*. Perchè nell' Eliſſi (fig. 88.) l' aſſe *Ss* = *s*F + FS = *s*H + *sb* = *b*H; e nell' Iperbole (fig. 89.) l'aſſe *Ss* = *s*F − FS = *s*H − *sb* = *b*H. Or tutte le *d*D ſon uguali a *b*H.

801. Si può dir anche che prendendo due PD ugualmente lontane dai vertici *S*, *s*, ſi ha *Ss* = PD + P*d*.

Cioè nell' Eliſſi l'aſſe principale *Ss* è ugual alla ſomma delle due PD, che ſon ugualmente lontane dalle due ſommità *S*, *s*; perchè le PD che ſono tra SB, *s*H, e ad ugual diſtanza, ſon in proporzion aritmetica. E nell' Iperbole l'aſse principale *Ss* è uguale alla differenza delle due PD, che ſon ad ugual diſtanza dai vertici *S*, *s*.

802. V.

802. V. Donde ſiegue, che le *Ordinate ugualmente ontane dai Vertici S, s, ſon uguali*, a cauſa de' triangoli rettangoli *aPm*, APM, che ſon allora uguali, avendo gli angoli uguali in A, *a*, e i lati AP, *a*P anche uguali.

803. VI. Siegue ancora che ſe ſi tira *ay* parallela a AG, e ſe ſi prende ſu *Ss* un punto *f*, tale che *sf* = SF, l'Eliſſi, e l'Iperbole avran potuto eſſer deſcritte per mezzo del punto *f*, come foco, e della direttrice *ay*, nella ſteſſa maniera come lo ſono ſtate pel foco F, e per la direttrice AG.

804. VII. Siegue di più, che *Ss* = FM ± *f*M (il ſegno + è per l'Eliſſi, e il — per l'Iperbole). Perchè ciaſcuna FM = PD, e ciaſcuna M*f* = PD, la quale è tanto lontana dal vertice S, quanto la PD fu cui il punto M è poſto, è lontana dal vertice *s*. Or in queſto caſo (801) PD + PD = *Ss*; dunque MF + M*f* = *Ss*.

805. VIII. Si può dunque dire, *l'Eliſſi è una curva di cui la ſomma delle due diſtanze di ciaſcuno de' ſuoi punti da due punti fiſſi, è ſempre coſtante, o uguale al ſuo aſſe principale*. E *l'Iperbole è una curva di cui la differenza delle due diſtanze di ciaſcuno de' ſuoi punti da due punti fiſſi è coſtante, o ugual al ſuo aſſe principale*.

806. Quindi ſi trae una maniera ſempliciſſima da deſcriver una grand' Eliſſi ſul terreno. Si piantano due picche F*f* (fig. 88) nel luogo ove devon eſſer i due fochi; vi ſi avvolga una corda F*f*MF, di cui i due capi ſien uniti; ſi faccia girar intorno a queſte picche un punto M, che tenga ſempre la corda teſa: queſto punto delinea un' Eliſſi. Poichè ſia il punto in S; allora è chiaro che la corda = 2F*f* + 2SF, o = 2F*f* + SF + *sf* = *Ss* + F*f*. Or per tutto il movimento la parte F*f* della corda non miſura che la diſtanza de' fochi, dunque il reſto che è = *Ss*, miſura la diſtanza di ciaſcun punto della traccia da ciaſcuno de' due fochi; Dunque ciaſcun punto è in una Eliſſi.

807. IX

807. IX. Da quel che si è detto (802) siegue ancora che si ha $Ss : Ff :: SA : SB$. Perchè $sA : sF :: SA : SB$. Dunque $sA + SA$ o $Ss : sF + SB$ o $Ff :: SA : SB$ (il segno — è per l' Ellissi, e + per l' Iperbole.

808. X. Siegue ancora che le doppie ordinate mM dell' Ellissi (fig. 88) vanno crescendo da ciascun vertice S, s, fin a quella ch'è nel mezzo fra l' asse, la quale è per conseguenza la più grande di tutte, e misura la maggior larghezza dell' Ellissi (come Ss ne misura la lunghezza) : perciò ella si chiama il *piccolo asse*, o il *secondo asse* dell' Ellissi, il quale quì è la retta m'' CM''; il punto C ove ella incontra il grand' asse Ss, si chiama il *centro* dell' Ellissi. Donde facilmente si vede:

1°. Che il piccolo asse taglia in due ugualmente tutto lo spazio racchiuso nell' Ellissi, come fa anche il grand' asse; e così *l' Ellissi resta per mezzo de' suoi due assi divisa in 4 parti uguali*.

2°. Che dato il grand'asse Ss, e i due fochi F, f, per determinar il piccolo asse, convien tagliare Ss in due ugualmente per una perpendicolare d'' D'', e terminarla da una parte e l'altra in m'' e M'', tirandovi da uno de' due fochi una retta come FM'' ugual alla metà del grand'asse. Perchè allora M'' F = M'' f, a causa de' triangoli rettangoli uguali FCM'', fCM'', e si ha M'' F + M'' f = Ss.

3°. Reciprocamente essendo dati i due assi, per trovar i fochi, bisogna dall'estremità del piccol asse tirare da una parte e l'altra sul grand'asse una retta ugual alla metà del grand'asse.

809. Nell' Iperbole (fig. 89.) le doppie ordinate vanno anche crescendo da ciascun vertice S, s all'infinito: e per conservar l'analogia tra l'Ellissi e l'Iperbole, si chiama centro dell' Iperbole il punto C che è nel mezzo tra i vertici S, s; l' asse Ss si chiama il *primo asse*, *asse principale*, *asse traverso*; e si chiama *secondo asse*, *asse retto* la retta lCL perpendicolare

re al primo asse, e terminata in L, *l*, tirandovi da uno de' vertici S, o *s* una retta SL ugual alla metà FC dell'intervallo E*f* de'fochi. Donde si vede facilmente quel che convien fare per determinar i due fochi, lorchè si hanno i due assi.

810. La doppia ordinata che passa pel foco d'una sezione conica si chiama il *Parametro* dell' asse principale di questa sezione.

811. Dalla costruzione generale delle Sezioni Coniche siegue ancora, che tutte quelle della stessa specie, per esempio, tutte le Ellissi che saranno costruite in maniera che le distanze AS da' loro vertici alle loro direttrici sieno proporzionali alle distanze SF da quelli stessi vertici al foco più vicino, tutte queste sezioni, dico, saranno figure simili. Perchè allora tutte le AP, le PD o le FM d'una sezione saranno proporzionali alle AP, alle PD, o alle FM omologhe nell' altra, e per conseguenza tutte le dimensioni omologhe di queste due sezioni saran proporzionali; il che le renderà figure simili.

812. Corol. I. *Due Ellissi, o due Iperbole sono simili, lorchè gli assi dell' una son proporzionali agli assi dell' altra, o quando le distanze dai vertici son proporzionali agl' intervalli de' fochi.*

813. Corol. II. *Tutte le Parabole son figure simili;* poichè si ha sempre AS = SF (fig. 90).

814. Probl. I. *Far passar una tangente per un punto* M *dato sopra una Sezione Conica.*

Sol. Per i due fochi F, *f* d' una sezione (fig. 95 e 96) e pel punto dato M si facciano passare due rette indefinite *f*M, FM. Si tiri una retta TM che divida in due ugualmente l'angolo FM*m* in cui la curva si trova compresa: questa retta sarà la tangente cercata.

Dim. Dal punto M come centro col raggio FM descrivasi l'arco F*m* che misura l'angolo FM*m*. E' chiaro che *fm* = *Ss*, poichè *fm* = M*f* + MF. Or se da un punto qualunque A preso su TM tutto altro

che

che il punto M, si tira *Af*, AF, *Am*, si avrà (405) AF = *Am*; dunque *Af* + AF = *Af* + *Am*. Or nell' Elissi (fig. 95) *Af* + *Am* eccede *fm*; il che fa vedere che il punto A è fuori della curva (804). E nell' Iperbole (fig. 96) se si avesse *Af* — *Am* = *fm*, il che è necessario (804) affinchè il punto A appartenga all' Iperbole, si avrebbe *Af* = *Am* + *fm*, il che è impossibile. Dunque non vi è che il punto M della retta FM che sia nella sezione.

815. Osserv. Si può applicar la soluzione precedente alla Parabola, facendo passar per il punto dato M (fig. 97) una retta MF, e una retta M*m* parallela all'asse, e per conseguenza stimata parte dell' altro foco, che è a una distanza infinita dal foco F, e dividendo in due ugualmente l' angolo FM*m*.

816. Corol. I. *L'angolo* bMf *al punto del contatto* (fig. 95, 97) *tra la tangente* Mb, *e una retta* Mf *diretta a uno de' fochi, è sempre ugual all' angolo* FMT *tra la stessa tangente, e la retta* MF *tirata all' altro foco*. Nell' *Iperbole* (fig. 96) *b*M*f* = *b*MF; il che ritorna sempre alla stessa espressione. Perchè l'angolo KM*m* = *b*M*f* per esser opposti al vertice; ma l'angolo KM*m* = FMT; dunque FMT = *b*M*f*.

817. Corol. II. *La corda* FM *è sempre divisa perpendicolarmente dalla tangente in due parti uguali* KF, Km.

818. Osserv. In tutto questo Trattato si chiameranno *Ascisse* d'un ordinata a un asse, o in generale a un diametro, la distanza da ciascuna estremità di questo diametro al punto, ove l'ordinata incontra questo diametro o il suo prolungamento. Così l' Elissi, il Circolo, l'Iperbole, han sempre due ascisse per ciascuna ordinata. Ma siccome non possono disegnarsi per *x* queste due differenti ascisse, si disegnerà per *x*, e si chiamerà *Ascissa* una parte del diametro compresa tra l'ordinata e un punto determinato su questo diametro, il qual punto si chiamerà l' origine delle *Ascisse*.

819.

819. Probl. II. *Determinar l' equazione che racchiude il rapporto tralle funzioni delle ordinate, e quelle delle loro asciſſe, contando le asciſſe da un vertice.*

Sol. Sia nell'Eliſſi (fig. 95) $Ss = 2a$, $Ll = 2b$, SF o $sf = c$, $SP = x$, $PM = y$; dunque $Ps = 2a - x$, $PC = a - x$, $PF = x - c$, $CF = a - c$, $Ff = 2a - 2c$, e $Pf = 2a - c - x$.

Nel triangolo rettangolo FlC ſi ha (527) $Fl^2 = FC^2 + lC^2$, o $aa = aa - 2ac + cc + bb$; donde ſi trae $cc = 2ac - bb$. Ciò poſto, nel triangolo FMf ſi ha (735) $fM + MF\ (2a) : Ff\ (2a - 2c) :: fP - PF\ (2a - 2x) : fM - MF = 2a - 2x - 2c + \frac{2cx}{a}$. Dunque $MF = a - a + x + c - \frac{cx}{a} = x + c - \frac{cx}{a}$. Or nel triangolo rettangolo PMF ſi ha $PM^2 = FM^2 - PF^2$, o $yy = xx + 2cx + cc - \frac{2cxx}{a} - \frac{2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa} - xx + 2cx - cc$, e riducendo $yy = 4cx - \frac{2cxx}{a} - \frac{2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$; e mettendo $2ac - bb$ invece di cc, ſi avrà $yy = 4cx - \frac{2cxx}{a} - \frac{4acx}{a} + \frac{2bbx}{a} + \frac{2acxx}{aa} - \frac{bbxx}{aa}$. Ma $-\frac{4acx}{a} + \frac{2acxx}{aa} = -4cx + \frac{2cxx}{a}$; dunque $yy = 4cx - 4cx + \frac{2bbx}{a} + \frac{2cxx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$; dunque togliendo le quantità che ſi diſtruggono, ſarà $yy = \frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$

$\frac{bbxx}{aa}$. Questa è l'equazione che racchiude il rapporto fralle funzioni delle ordinate e quelle delle loro ascisse prese da un vertice.

Nell'Iperbole (fig. 96) facendo similmente $Ss = 2a$, $Ll = 2b$, SF o $sf = c$, SP $= x$, e PM $= y$; si ha $Ps = 2a + x$, PC $= a + x$, PF $= x - c$, $Pf = x + 2a + c$, CF o $Sl = a + c$ (809). E nel triangolo rettangolo SCl, si ha $Sl^2 = Cl^2 + SC^2$, o $aa + 2ac + cc = bb + aa$. Dunque $cc = bb - 2ac$. Avendo poi supposta una retta $M\varphi = MF$, e tirata da M dall'altra parte dell'ordinata MP, si avrà $P\varphi = PF$; nel triangolo φMF si ha $Mf - M\varphi$ o $fM - FM\,(2a) : f\varphi\,(2a + 2x) :: Pf - P\varphi\,(2a + 2c) : FM + fM = 2a + 2c + 2x + \frac{2cx}{a}$. Dunque $FMc + xc + \frac{cx}{a} - a$. Dunque essendo $PM^2 = FM^2 - PF^2$, ed essendo $PM = y$, $FM = c + x - \frac{cx}{a}$, $PF = x - c$; sarà $y^2 = cc + 2cx + xx + \frac{2ccx}{a} + \frac{2cxx}{a} + \frac{ccxx}{aa} - cc + 2cx - xx = 4cx + \frac{2ccx}{a} + \frac{2cxx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$. Ma $cc = bb - 2ac$; dunque $yy = 4cx + \frac{2bbx}{a} - \frac{4acx}{a} + \frac{2cxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} - \frac{2acxx}{aa} = 4cx + \frac{2bbx}{a} - 4cx + \frac{2cxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} - \frac{2cxx}{a}$. Dunque togliendo le quantità

che

che si distruggono, si avrà $yy = \frac{2bbx}{a} \pm \frac{bbxx}{aa}$ *per l'equazione agli assi dell'Iperbole.*

820. II. I calcoli dell'Ellissi, e dell'Iperbole si fanno nella stessa maniera, ed i loro risultati non differiscono ordinariamente che ne' segni; perciò lorchè si faranno in appresso de' calcoli che saran comuni alle due sezioni, e che avran solamente alcuni termini preceduti da $\pm$ o da $\mp$, il segno superiore sarà sempre per l'Ellissi, e l'inferiore per l'Iperbole. Così le due equazioni precedenti si riducon a questa $yy = \frac{2bbx}{a} \mp \frac{bbxx}{aa}$.

821. Nella Parabola, ove $a = \infty$, l'espressione $yy = 4cx \pm \frac{2cxx}{a} \mp \frac{2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$ si riduce a $yy = 4cx$. Questa è dunque *l'equazione della Parabola.*

822. Coroll. Poichè $cc = \pm 2ac + bb$, si ha $bb = 2ac \mp cc = c \times (2a \mp c) = SF \times F^r$, segue che *la metà del secondo asse è media proporzionale tra le distanze d'un foco dai due vertici.*

823. Probl. III. *Trovar l'espressione del parametro dell'asse principale d'una Sezione Conica.*

Sol. Se nell'espressione $yy \pm 4cx \pm \frac{2cxx}{a} \mp \frac{2ccx}{a} + \frac{ccxx}{aa}$, si fa $x = c$, si avrà $yy = 4cc \pm \frac{4c^3}{a} \mp \frac{c^4}{aa}$; estraendo le radici, $y = 2c \pm \frac{cc}{a}$; questo è il valore della ordinata che passa pel foco F; il suo doppio è (810) il valore del parametro p; si ha dunque $p = 4c^2 \pm \frac{2cc}{a}$.

824. Corol. I. *Nella Parabola, a cauſa di* $a = \infty$, ſi *ha* $p = 4c$.

825. Coroll. II. *Il parametro dell' aſſe principale d'una Sezione Conica è quadruplo della diſtanza del vertice al foco nella Parabola; più del quadruplo nell' Iperbole, e meno del quadruplo nell' Elliſſi.*

826. Coroll. III. Se nell'equazione $p = 4c + \frac{2cc}{a}$ ſi ſoſtituiſce a cc il ſuo valore $+ 2ac + bb$, ſi avrà $p = \frac{4bb}{2a}$; il che dà queſta proporzione $2a : 2b :: 2b : p$. Vale a dire, *il parametro dell' aſſe principale è una terza proporzionale a queſt' aſſe, e al ſecondo aſſe.*

827. Probl. IV. *Trovar un'equazione che contenga il rapporto del parametro dell' aſſe principale alle funzioni delle aſciſſe e delle ordinate d'una ſezione conica.*

Sol. Poichè $p = \frac{2bb}{a}$, dunque $\frac{1}{2} ap = bb$; dunque ſoſtituendo nell'equazione generale $yy = \frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$, ſi avrà $yy = px + \frac{pxx}{2a}$.

828. Corol. I. Nella Parabola a cauſa di $a = \infty$, ſi ſi ha $yy = px$, e *queſta è l'equazione della parabola*, la ſteſſa che la precedente (821).

829. Corol. II. L'equazione generale $yy = px + \frac{pxx}{2a}$, o $2ayy = 2apx + pxx$, ſi riduce a queſta proporzione $yy : 2ax + xx : p : 2a$. Or $2ax + xx = (2a + x) \times x = s\,P \times PS$. Dunque in generale, *i quadrati delle ordinate all' aſſe principale delle Elliſſi e delle Iperbole ſono ai prodotti delle aſciſſe corriſpondenti, come il parametro è all' aſſe principale.* E perchè il rapporto del parametro al ſuo aſſe è coſtante in una ſteſſa

ſteſſa ſezione conica, ſi può di e in generale, che *i quadrati delle ordinate ſon tra loro come i prodotti delle loro aſciſſe*.

Mettendo anche in proporzione l' equazione degli aſſi $yy = \frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$, ſi ha $yy : 2ax - xx :: bb : aa$, vale a dire, *nell' Eliſſi, e nell' Iperbole i quadrati delle ordinate all' aſſe principale ſon ai prodotti delle loro aſciſſe, come il quadrato del ſecondo ſemi-aſſe è al quadrato del ſemi-aſſe principale*.

830. Coroll. III. Nella Parabola a cauſa del parametro coſtante p, il rapporto di yy a x è coſtante. Dunque *nella parabola i quadrati delle ordinate ſon fra loro come le aſciſſe*.

Eſſendo un' ordinata y, e la ſua aſciſſa x, ed una ſeconda ordinata Y e la ſua aſciſſa X, e p il parametro della Parabola, ſarà $yy = px$, e $YY = pX$ (828); dunque $yy : YY :: px : pX$; ma p è una quantità coſtante, dunque $yy : YY :: x : X$. Dunque *nella parabola i quadrati delle ordinate ſon tra loro come le aſciſſe corriſpondenti*.

E poichè $yy = px$, ſiegue che creſcendo x, deve creſcer y, o p deve diminuire; ma p eſſendo coſtante non può diminuire, dunque creſcendo x deve creſcer anche y. Ma anche nella Parabola l' aſciſſa creſce all' infinito, perchè l' aſſe $= \infty$; dunque anche le ordinate poſſon creſcer all' infinito; dunque la Parabola anderà ſempre creſcendo ſenza chiuderſi mai.

831. Probl. V. *Trovar l' eſpreſſione della ſuperpendicolare, o ſunnormale* PN. (fig. 95, 96).

Sol. Fm eſſendo (817) perpendicolare a MT, è parallela alla normale MN, e i triangoli fMN, fmF ſono ſimili. Dunque $fm\,(2a) : fF\,(2a + 2c) :: Mm$ o $FM\,(x + c + \frac{cx}{a}) : FN = x + c + \frac{cc}{a} + \frac{2cx}{a} + \frac{ccx}{aa}$. Or $PN = FN - FP$, e $FP = x - c$; dunque

$PN = 2c + \frac{-cc}{a} + \frac{2cx}{a} + \frac{ccx}{2a}$. Sostituendo $+ 2ac + \frac{1}{2}ap$ in luogo di cc (823), e riducendo, $PN = \frac{1}{2}p - px + \frac{2bb}{2a}$. E se si mette $\frac{2bb}{a}$ in luogo di p (826) si avrà $PN = \frac{bb}{a} - \frac{bbx}{2a}$.

832. Corol. I. *Nella Parabola la sunnormale è la metà del parametro, e per conseguenza sempre costante*, a causa di $a = \infty$; il che fa $PN \frac{1}{2}p = FA$ (fig. 97).

833. Corol. II. *In una Sezione Conica la sunnormale è riguardo al semi-parametro dell'asse principale, uguale nella Parabola: più piccola nell' Ellissi; più grande nell' Iperbole.*

834. Probl. VI. *Trovar l' espressione della sottangente* PT.

Sol. Nel triangolo rettangolo NMT si ha (526) PN. PM. PT. Dunque $PT = \frac{PM^2}{PN}$; dunque

$$px - \frac{pxx}{2a} = \frac{2apx - pxx}{2a}.$$

$$\frac{1}{2}p - \frac{px}{2a} = \frac{2ap - 2px}{4a}.$$

$\frac{2apx - pxx}{2a}$ diviso per $\frac{2ap - 2px}{4a} = \frac{8aapx - 4apxx}{4aap - 4apx} =$

$$\frac{8apx - 4pxx}{4ap - 4px}.$$

Dividendo per $4p$ il numeratore e il denominatore di quest' ultima frazione, si avrà $\frac{2ax - xx}{a - x}$. Dunque nell' Ellissi la sottangente $PT = \frac{2ax - xx}{a - x}$.

Con

Con un calcolo simile si avrà per l' Iperbole la sottangente $PT = \frac{2ax + xx}{a+x}$. Onde l' equazione comune all' Ellissi, e all'Iperbole sarà $PT = \frac{2ax+xx}{a+x}$.

835. Corol. I. Nella Parabola $PT = 2x$, perchè essendo $a = \infty$, si ha $PT = \frac{2\infty x + xx}{\infty + x} = \frac{2\infty x}{\infty} = 2x$.

836. Corol. II. *In una Sezione Conica la sottangente è riguardo al doppio dell' ascissa, uguale nella Parabola, più grande nell' Ellissi, più piccola nell' Iperbole.* Perchè mettendo la formola in proporzione, si ha per l' Ellissi $PT : 2a - x :: x : a - x$, e moltiplicando la seconda ragione per 2, si ha $PT : 2a - x :: 2x : 2a - 2x$; or $2a - x$ è più grande di $2a - 2x$; dunque PT è più grande di $2x$. E nell' Iperbole $PT : 2a + x :: 2x : 2a + 2x$; or $2a + x$ è minore di $2a + 2x$, dunque PT è minore di $2x$.

837. Corol. III. $PT - SP = ST$, dunque $ST = \frac{ax}{a+x}$, e nella Parabola $ST = x$. Si vede dunque che *ST riguardo all' ascissa uguale nella Parabola, più grande nell' Ellissi, più piccola nell' Iperbole.*

838. Osservaz. La Parabola e l' Iperbole avendo due rami infiniti, x può divenire $= \infty$; or nella Parabola a causa di $ST = x$, ST diverrebbe anche infinita. Ma nell' Iperbole facendo $x = \infty$ nell'equazione $ST = \frac{ax}{a+x}$, ella si riduce a $ST = a$; il che fa vedere. 1.° Che *il punto di rincontro* T *di tutte le tangenti possibili dell' Iperbole col suo asse principale, è sempre com-*

compreso tra il vertice e il centro. 2.° Che *pel centro dell'Iperbole si può menare da ciascun lato dell'asse una retta che vada a toccare ciascun ramo alla sua estremità infinita*. Queste due tangenti si chiaman gli *Asintoti* dell'Iperbole.

839. Corol. IV. $CP \mp PT = CT$. Dunque $CT = \frac{aa}{a \mp x}$; il che essendo posto in proporzione, dà $a \mp x : a :: a : CT$. Dunque CP, CS, CT son in proporzione continua, e per questa proporzione si trova facilmente il punto T sull'asse principale, per ove deve passar una tangente che si propone di menare da un punto dato M.

840. Probl. VII. *Trovar l'espressione della perpendicolare* SB (fig. 95, 96) *all'asse principale della sezione conica, elevata dal vertice* S *fin alla tangente* TM.

Sol. I triangoli TPM, TSB essendo simili, si ha $TP \frac{(2ax \mp xx)}{(a \mp x)} : TS \frac{(ax)}{(a \mp x)} :: PM : SB$; o a causa dello stesso denominatore $a \mp x$, si ha $2ax \mp xx : ax :: PM : SB$, o finalmente $2a \mp x : a :: PM : SB$. Elevando al quadrato, e mettendo per PM il suo valore (821) si ha $4aa \mp 4ax + xx : aa :: \frac{2abbx \mp bbxx}{aa} : SB^2$. Dunque $SB^2 = \frac{2abbx \mp bbxx}{4aa \mp 4ax + xx}$, ovvero mettendo $\frac{1}{2}p$ in luogo di bb (829), si avrà $SB^2 = \frac{aapx \mp \frac{1}{2}apxx}{4aa \mp 4ax + xx}$.

841.

841. Corol. I. Nella Parabola $SB = \frac{1}{2}PM$ $\frac{1}{2}y$; perchè $a = \infty$, dunque $SB^2 = \frac{\infty^2 px}{4\infty^2} - \frac{1}{4}px = \frac{1}{4}yy$; dunque $SB = \frac{1}{2}y$.

842. Coroll. II. Nell'Iperbole facendo $x = \infty$, la prima formola di SB^2 si riduce a $SB^2 = \frac{bb\infty^2}{\infty^2} = bb$. Dunque $SB = b$. Dunque facendo $S\beta$, $S\beta$ (fig. 93) uguali alla metà del secondo asse, e facendo passare pel centro C le rette $\beta\beta$, bB, elle saranno gli Asintoti dell'Iperbole MSm, OSo.

843. Probl. VIII. *Trovar l'espressione della normale* NM.

Sol. Nel triangolo rettangolo NPM, si ha da $NM^2 = PM^2 + PN^2$. Dunque $NM^2 = \frac{2a^3bbx + aabbxx + aab^4 + 2ab^4x + b^4xx}{a^4}$ e facendovi entrar il parametro. $NM^2 = \frac{4aapx + 2apxx + aappx + 2appx + ppxx}{4aa}$.

844. Corol. I. Nella Parabola, dove $a = \infty$, si ha $NM^2 = px + \frac{1}{4}pp$.

845. Corol. II. Se si fa $x = o$ nella seconda formola, ella si riduce a $NM^2 = \frac{1}{4}pp$; dunque $NM = \frac{1}{2}p$. E se si fa $x = a$ nella prima, si avrà per l'Ellissi $NM = b$. Il che fa vedere:

1.° Che *in ogni Sezione Conica la normale è almen uguale alla metà del parametro, o all'ordinata che passa pel foco*. Poichè se si prende il punto M sì presso al vertice S, che l'ascissa corrispondente all'ordinata MP sia infinitamente piccola o nulla, la normale $= \frac{1}{2}p$.

2.° Che *nell'Ellissi la normale non può eccedere la metà del piccol asse*.

846. Probl. IX. *Trovar l' espressione* di SN, cioè *della distanza del vertice S dal rincontro della normale* MN.

Sol. $SN = SP + PN = \frac{abb + bbx + aax}{aa} = \frac{ap + px + 2ax}{2a}$;

e nella Parabola $SN = \frac{1}{2}p + x$.

847. Corol. Se si fa $x = o$, si ha $SN = \frac{1}{2}p$; e perchè le quantità a e p son additive e costanti nelle formole della Parabola e dell' Iperbole, è chiaro che quanto più grande sarà x, più sarà grande SN in queste due sezioni. Donde si vede che la normale cade al di là del foco riguardo al vertice, e giammai tra il vertice e il foco più vicino.

848. Probl. X. *Trovar l'espressione della tangente* TM.

Sol. $PM^2 + PT^2 = TM^2$, dunque $TM^2 = \frac{2abbx + bbx}{aa} + \frac{4aaxx + 4ax^3 + x^4}{aa}$. Ovvero $TM^2 = px + \frac{pxx}{2a} + \frac{4aaxx + 4ax^3 + x^4}{aa + 2ax + xx}$. E nella Parabola $TM^2 = px + 4xx = 4\,AS \times SP + 4\,SP^2$.

849. Probl. XI. *Trovar un' equazione agli assi dell' Ellissi, e dell' Iperbole contando le ascisse dal centro* (fig. 95 e 96).

Sol. Ritenendo le stesse denominazioni de' problemi precedenti, all'infuori di $CP = x$, il che fa l'ascissa $SP = \pm a \pm x$, e $sP = a + x$, si ha (829) $yy : \pm aa \mp xx :: bb : aa :: p : 2a$. Dunque l'equazione agli assi è $yy = \pm bb \mp \frac{bbxx}{aa}$. E l' equazione al parametro, $yy = \pm \frac{1}{2}ap \mp \frac{pxx}{2a}$.

850. Coroll. I. Per l'Ellissi, L' Ordinata MH al piccol

col asse dell' Ellissi (fig. 95) essendo $=$ CP $=$ x, e CH $=$ PM $=$ y, si hanno le ascisse LH $=$ $b-y$, e HI $=$ $b+y$; dunque LH $\times$ HI $=$ $bb-yy$. Or l' equazione $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$ si riduce a questa proporzione $xx : bb-yy :: aa : bb$. Dunque i *quadrati delle ordinate al piccol asse di una Ellissi son ai prodotti delle loro ascisse, come il quadrato del grand' asse al quadrato del piccolo*. E per conseguenza se si fa $\div$ $2b . 2a . q$, o se si fa $q = \frac{2aa}{b}$ (q è il parametro di piccol asse) sostituendo nella proporzione, si avrà $xx : bb-yy :: q : 2b$; cioè *i quadrati delle ordinate al piccol asse son ai prodotti delle loro ascisse, come il parametro del piccolo asse è al piccolo asse*. E in generale, *i quadrati delle ordinate al piccol asse son fra loro, come i prodotti delle loro ascisse*.

851. Corol. II. *Le ordinate al piccol asse dell' Ellissi han precisamente le stesse proprietà che quelle del grand asse*.

852. Corolì. III. Se si descrive un circolo SNsQ (fig. 100) di cui il diametro Ss sia il grande o il picciol asse d'una Ellissi, e se vi si tirano NP, np ordinate a questo diametro, i loro quadrati son fra loro (777) come i prodotti delle loro ascisse sPXSP, sPXpS. Or i quadrati di MP, mp sono nello stesso rapporto, dunque i quadrati delle ordinate ai circoli son come i quadrati delle ordinate corrispondenti all' Ellissi, e per conseguenza *le ordinate al circolo son fra loro come le ordinate all' Ellissi*, o son fra loro come OC o CS a LC, vale a dire, *come l'asse su cui il circolo è stato descritto è all' altr' asse*.

853. Osserv. I. Il rapporto delle ordinate al secondo asse dell' Iperbole non può esser ridotto alla stessa proporzione: perchè se si mette in proporzione l'equazione all' Iperbole $yy = -bb + \frac{bbxx}{aa}$, si ha xx :

yy

$yy + bb :: aa : bb$. di cui il ſecondo termine $yy + bb$ eſprime la ſomma de' quadrati di CH e di CL. (fig. 96), e non il prodotto delle aſciſſe HL, Hl, il quale a cauſa di HL $= y - b$, e di H$l = y + b$, è $yy - bb$. Ma indipendentemente da queſta proporzione, ſi ha la formola generale $xx = aa \mp \frac{aayy}{bb}$ per l'equazione al ſecondo aſſe dell'Eliſſi e dell'Iperbole, contando le aſciſſe dal centro, e chiamando la ordinata x e l'aſciſſa y.

854. Oſſerv. II. A imitazione di queſta ſoluzione ſi poſſon trovare delle equazioni contando le aſciſſe dal foco, o anche da un punto qualunque preſo nell' aſſe.

755. Corol. IV. Calcolando ſu l'equazioni di queſto Problema gli ſteſſi triangoli che ne' Probl. V, VI, VII, VIII, IX, e X, ſi trovano formole ſeguenti; PN $= \frac{bbx}{aa} = \frac{px}{2a}$; PT $= \frac{\pm aa \mp xx}{X}$, CT $= \frac{aa}{x}$, ST $= \frac{\pm aa \pm ax}{x}$, SB$^2 =$

$$\frac{\pm a^4bb \pm 2a^3bbx \pm 2abbx^3 \pm bbx^4}{a4 - 2aaxx + x^4}$$

ovvero

$$\frac{\pm a^5p \pm 2a^4px \pm 2aapx^3 \pm apx^4}{2a^4 - 4aaxx + 2x^4}, \quad NM^2 = \frac{\pm a^4bb \pm aabbxx \pm b^4xx \pm 2a3p \pm 2apxx \pm ppxx}{a^4} = \frac{\quad}{4aa};$$

SN

$$SN = \frac{+a^3 + aax + bbx + 2a + 2ax + px}{aa + 2a};$$

$$MT^2 = \frac{a^6 - 2a^4xx + aax^4 + aabbxx + bbx^4}{aaxx}, 0$$

$$MT^2 = \frac{2a5 - 4a^3xx + 2ax^4 + aapxx + px^4}{2axx}.$$

856, Corol. V Poichè c non entra in alcuna delle formole de' Problemi precedenti, ſiegue che queſte formole convengon anche al ſecondo aſſe dell'Eliſſi e dell' Iperbole, e che n'eſprimono le proprietà, col far i neceſſarj cambiamenti nelle lettere.

857. Corol. VI. Poichè il ſecondo aſſe Ll delle Iperbole oppoſte MSm, Oso (fig. 93) è ſtato determinato tirando CF o Cf da S in L e in l; e gli Aſintoti (842) facendo SB, $S\beta$ uguali a CL o Cl; ſiegue che ſe ſi prende $C\varphi$, $C\varphi$ uguali a LS o ls, e ſe ſi tira $b\beta$, $B\beta$, elle paſſeranno per i punti L, l, e ſi avrà Lb, $L\beta$; IB, $I\beta$, uguali a Cs o CS; donde ſi vede che con i punti φ, φ come fochi, e Ll come aſſe principale, ſi poſſon deſcrivere due Iperboli oppoſte dLD, Nln, di cui Ss ſarà il ſecondo aſſe, e di cui Bb, $\beta\beta$ ſaranno gli aſintoti. Queſte due Iperboli ſi chiamano *Conjugate* alle due MSm, Oso; e reciprocamente queſte ſi dicon *Conjugate* a quelle.

858. E' evidente che *tutte le equazioni, formole e proprietà che convengon alle Iperboli* MSm, Oso, *convengon anche alle loro Conjugate, facendovi i cangiamenti neceſſarj*; per eſempio, chiamando Ll l'aſse principale, e Ss il ſecondo aſſe &c.

859. E' chiaro ancora che *gli otto rami delle quattro Iperboli conjugate devon congiungerſi, ſenza tagliarſi, ai punti ove gli aſintoti toccano le loro eſtremità; e in queſta maniera elle formano una figura chiu-*

chiusa da quattro punti di riunione infinitamente lontani dal centro. Questa figura è un poligono simetrico, composta d'una infinità d'angoli rientranti infinitamente ottusi e di quattro angoli infinitamente acuti; così che si può considerar lo spazio compreso tra queste quattro Iperboli, come si considera quello che è racchiuso in una Ellissi. Perciò si parlerà in appresso di questo spazio, come se fosse terminato da una sola curva.

Proprietà delle Sezioni Coniche riguardo a' loro Diametri.

860. Dicesi *Diametro* d'una Sezione Conica ogni retta che passa pel suo centro; perchè si farà vedere che la loro proprietà è di tagliar in due ugualmente le rette che divengono le loro doppie ordinate.

861. Un diametro è determinato di grandezza dai due punti, ove incontra la Sezione da una parte e l'altra; e questi punti son chiamati l'origine di questo diametro. Così OM, ND (fig. 93, 94) sono diametri determinati, de' quali le origini sono i punti O, M, e N, D.

862. Quindi siegue che *il diametro di una Parabola è una retta indefinita, tirata da un punto della Parabola, il qual è la sua origine, parallelamente all'asse*; poichè il centro della Parabola è infinitamente lontano del vertice; tal è M*f* (fig. 97).

863. Si chiama *diametro conjugato a un altro diametro* quello ch'è parallelo alle ordinate di questo, o alla tangente che passa per la sua origine. Così (fig. 93, 94) ND è un diametro conjugato al diametro MO, perchè ND è parallela alla tangente che passa pel punto M. Reciprocamente MO dicesi diametro conjugato al diametro ND.

864. Donde si vede, che *la Parabola non ha diametri conjugati*.

865. Teor. I. *Un diametro qualunque* NC (fig. 93, 94) *è diviso in due ugualmente al centro* C.

Dim.

Dim. Per N si tiri NQ ordinata a uno degli assi, e facendo CE = CQ, s'inalzi allo stesso asse le perpendicolare ED; questa incontrerà il diametro ND in un punto D che sarà nella sezione. Perchè per la costruzione i triangoli CQN, CED son uguali, dunque CD = CN, e DE = NQ. Or (802) le ordinate ugualmente lontane dal centro son uguali; dunque NQ essendo un'ordinata, la sua uguale DE anche ne è una, dunque la sua estremità D è nella sezione.

866. Teor. II. *Se dalle estremità* M, N *di due diametri conjugati, si tirano* MP, NQ *ordinate all'asse principale* Ss, *il quadrato* CQ^2 *dell'ascissa compreso tra il centro* C *e il rincontro d'una delle ordinate, è ugual al prodotto* $sP \times PS$ *delle ascisse dell'altra ordinata.*

Dim. Retinendo tutte le stesse denominazioni del Probl. XI., facendo di più $CQ = u$, si ha (fig. 94) $SQ = a - u$, e $sQ = a + u$. Nell'Ellissi si ha (829) $sP \times PS\ (aa - xx) : SQ \times Qs\ (aa - uu) :: PM^2 : NQ^2$. E nell'Iperbole (853) $sP \times PS\ (-aa + xx) : CS^2 + CQ^2\ (\overline{+}aa + uu) :: PM^2 : NQ^2$. Dunque $\overline{+}aa + xx : aa + uu :: PM^2 : NQ^2$. Or a causa de' triangoli simili TPM, CNQ, si ha $PM^2 : NQ^2 :: TP^2 \left(\frac{(\overline{+}aa + xx)^2}{xx}\right) : CQ^2\ (uu)$; dunque $uu = \overline{+}a^2 + xx$, o $CQ^2 = sP \times PS$.

867. Corol. I. Nell'Ellissi niuna delle ascisse può esser al di là del vertice riguardo al centro; onde si ha sempre CE^2 o $CQ^2 = SP \times Ps$, e $CP^2 = SQ \times Qs$. Questa ultima uguaglianza non si trova nell'Iperbole, ove $CP^2 = CS^2 + CQ^2$, a causa di $xx = aa + uu$.

868. Coroll. II. Per l'Ellissi, $aa : bb :: sQ \times QS$ o CP^2

$CP^2 (xx) : NQ^2 = \frac{bbxx}{aa}$. Or ne' triangoli, rettangoli CPM, CNQ, si ha $CM^2 = CP^2 + PM^2$; dunque $CM^2 = xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$, e $CN^2 = CQ^2 + NQ^2$; dunque $CN^2 = aa - xx + \frac{bbxx}{aa}$.

Dunque $CM^2 + CN^2 = bb + aa$. Dunque *la ſomma de' quadrati di due diametri conjugati qualunque d'un' Eliſſi, è uguai alla ſomma de' quadrati di due aſſi, e per conſeguenza alla ſomma de' quadrati de' due altri diametri coniugati*. O ch'è lo ſteſso, *nell' Eliſſi la ſomma de' quadrati di due diametri conjugati qualunque è coſtante*,

869. Corol. III. Per l' Iperbole . *aa: bb*:: $CS^2 + CQ^2$, ovvero $CP^2 (xx) : NQ^2 = \frac{bbxx}{aa}$. Or $CM^2 = CP^2 + PM^2$, dunque $CM^2 = xx - bb + \frac{bbxx}{aa}$, e $CN^2 = CQ^2 + NQ^2$. Dunque $CN^2 = xx - aa + \frac{bbxx}{aa}$. Dunque $CN^2 - CM^2 = bb - aa$. Dunque *la differenza de' quadrati di due diametri conjugati qualunque d'un' Iperbole è coſtante*.

870. Teor. III. *Il quadrato d'una retta* IH *tirata nel di dentro d'una ſezione conica, e ordinata a un diametro* MO *qualunque, è ai prodotti* MH × HO *delle ſue aſciſſe, come* CN^2 *il quadrato del ſemi-diametro conjugato è al quadrato* CM^2 *del ſemidiametro, cui* IH *è ordinata*. Ovvero IH^2: MH × HO: CN^2: CM^2 (fig. 24).

Dim. Si tratti prima dell' Eliſſi.

1.°

1.° Tirata IG ordinata all'asse Ss o $2a$, e tirate per H le perpendicolari HR, HK; e facendo GK o HR $= r$, CK $= t$, CM $= d$, si ha SG $= r + a - t$, e $sG = a - r + t$. In fatti SG $+ sG =$ $Ss = 2a$. Ma $r + a - t + a - r + t = 2a$. Dunque SG $= r + a - t$, e $sG = a - r + t$.

2.° I due triangoli CPM, CHK son simili a causa dell'angolo comune C e delle parallele KH, PM; dunque CP (x) : CM (d) :: CK (t) : CH $= \frac{dt}{x}$; dunque MH $= CM - CH = d - \frac{dt}{x}$; dunque OH $=$ OG $+$ CH $= d + \frac{dt}{x}$; dunque MH $\times$ OH $= dd - \frac{ddtt}{xx}$. Si ha ancora CP (x) : PM (y) :: CK (t) : KH o RG $= \frac{ty}{x}$.

3.° I triangoli TPM, HIR son simili, perchè i lati omologhi son paralleli fra loro; dunque TP : PM :: HR : RI. Dunque (855) $\frac{aa-xx}{x} : y :: r :$ RI. Dunque RI $= \frac{rxy}{aa-xx}$.

4.° IG^2 $=$ RI^2 $+$ GR^2 $+$ (GR $\times$ RI) $+$ (RI $\times$ GR). Dunque IG^2 $= \frac{rrxxyy}{(aa-xx)^2} + \frac{ttyy}{xx} + \frac{2rtyy}{aa-xx}$.

5.° (829) $sP \times SP : sG \times SG :: PM^2 : IG^2$; dunque $aa - xx : 2rx + aa - rr - tt :: yy :$ IG^2; dunque IG^2

$IG^2 = \frac{2rtyy + aayy - rryy - tty}{aa - xx}$. Ma $IG^2 =$ (n.° 4.°) $\frac{rrxxyy}{(aa-xx)^2} + \frac{2rtyy}{aa-xx} + \frac{ttyy}{xx}$; dunque

$$\frac{2rtyy + aayy - rryy - ttyy}{aa-xx} = \frac{rrxxyy}{(aa-xx)^2} + \frac{2rtyy}{aa-xx} + \frac{ttyy}{xx}.$$

6.° Togliendo da una parte e l' altra $\frac{2rtyy}{aa-xx}$, si avrà

$$\frac{aayy - rryy - ttyy}{aa-xx} = \frac{rxxxy}{(aa-xx)^2} + \frac{ttyy}{xx}.$$

7.° Dividendo tutto per yy, si avrà $\frac{aa - rr - tt}{aa - xx} =$

$$\frac{rrxx}{(aa-xx)^2} + \frac{tt}{xx}.$$

8.° E moltiplicando per $aa - xx$, si avrà $aa - rr - tt = \frac{rrxx}{aa-xx} + \frac{aatt}{xx} - \frac{ttxx}{xx}$, Dunque $aa - rr - tt = \frac{rrxx}{aa-xx} + \frac{aatt}{xx} - tt$, perchè $- tt = - \frac{ttxx}{xx}$.

9°. Togliendo da una parte e l'altra $- tt$, resterà

$$aa - rr = \frac{rrxx}{aa-xx} + \frac{aatt}{xx} = \frac{rrxx}{aa-xx} + rr;$$

dunque $aaxx - aatt = \frac{rrx^4}{aa-xx} + rrxx$.

10.°

10.° Moltiplicando per $aa - xx$, si avrà $a^4 xx - a^4tt - aax^4 + aattxx = rrx^4 + aarrxx - rrx^4$; dunque $a^4xx - a^4tt - aax^4 + aattx^x = aarrxx$; dunque dividendo tutto per aa, si avrà $aaxx - aatt - x^4 + ttxx = rrxx$, ovvero $aa - \frac{aatt}{xx} - xx + tt = rr$.

11.° $dd - \frac{ddtt}{xx} : dd :: aa - xx + tt - \frac{aatt}{xx} : aa - xx$.

12.° $MH \times HO = dd - \frac{ddtt}{xx}$. $CM^2 = dd$. $HR^2 = rr = aa - xx + tt - \frac{aatt}{xx}$. $CQ^2 = aa - xx$ (866); dunque $MH \times HO : CM^2 :: HR^2 : CQ^2$.

13°. I triangoli HIR, CNQ son simili; dunque $IH : CN :: HR : CQ$; dunque $IH^2 : CN^2 :: HR^2 : CQ^2$: Ma $HR^2 : CQ^2 :: MH \times HO : CM^2$; dunque $MH \times HO : CM^2 :: IH^2 : CN^2$; dunque $MH \times HO : IH^2 :: CM^2 : CN^2$; dunque $IH^2 : MH \times HO :: CN^2 : CM^2$; ch'è quel, che si dovrà dimostrare.

Lo stesso calcolo nella stessa maniera si applica all' Iperbole (fig. 93).

871. Corol. Le ordinate a un diametro qualunque dell' Ellissi non potendo cadere al di fuori della sezione, questo Teor. è vero riguardo a un diametro qualunque dell'Ellissi; e si vede facilmente che *in tutte le Sezioni Coniche le proprietà degli assi che non dipendono necessariamente da quelle de fochi, convengon anche ai diametri conjugati.*

Non vi è differenza, se non in quanto che le ordinate agli assi sono loro perpendicolari, mentre che le ordinate ai diametri son loro obblique. Onde se dal

punto *l* si mena *lh* ordinata al diametro DN; si dimostrerà come (850) che nell' Ellissi $lh^2 : Dh \times hN :: CM^2 : CD^2$, e che nell' Iperbole (853) $lh^2 : Ch^2 + CD^2 :: CM^2 : CD^2$; cosicchè può servirsi delle stesse equazioni per i diametri che per gli assi conjugati, di cui i parametri saranno terze proporzionali, come (826). Ma riguardo a quello d' un diametro *Mf* (fig. 97) della Parabola, sarà sempre il quadruplo della distanza M*m* dalla sua origine M alla direttrice A*m* o al foco dell' asse. Perchè (848) $MT^2 = 4AS \times SP + 4SP^2$. Or se pel vertice S si tira SO ordinata al diametro M*f*, si ha SO = MT; e la sua ascissa MO = ST = SP (837). Ma perchè le ordinate ai diametri hanno le stesse proprietà che quelle dell' asse, $SO^2 = MO \times p$ (828) o $4AS \times SP = 4SP^2 = SP \times p$, o dividendo per SP, $4AS + 4SP = p$. Or $4AS + 4SP = 4AP = 4Mm = 4MF$. Dunque $p = 4Mm = 4MF$.

872. Teor. IV. *Se dall' estremità* M *d' un diametro qualunque* CM (fig 98, 99) *si abbassa sul suo conjugato la perpendicolare* MR, *si ha questa proporzione* MR : CL :: CS: CD.

Dim. $CD^2 + CM^2 = bb + aa$, perchè (868) $CM^2 + CN^2 = bb + aa$. Ma $CN^2 = CD^2$, dunque $CD^2 + CM^2 = bb + aa$; dunque $CD^2 = bb + aa - CM^2$; ma $CM^2 = xx + bb - \frac{bbxx}{aa} = \frac{aaxx + aabb - bbxx}{aa}$ (868); dunque $CD^2 = bb + aa - \frac{aaxx - aabb + bbxx}{aa} = \frac{aabb + a^4 - aaxx - aabb + bbxx}{aa}$; dunque $CD^2 = \frac{a^4 - aaxx + bbxx}{aa}$.

Dal centro C tirando sulla tangente la perpendicolare C*l*, continuata fin al suo rincontro in X, i tri-

triangoli simili C*l*X, MNP danno C*l* o MR : CX :: MP o CV : NM*l*. Dunque MR×NM = CX×CV. Ma (839, 856) CX×CV = CL². Dunque MR×

$$NM = CL^2. \text{ Dunque } NM^2 = \frac{b^4xx + a^4bb + aabbxx}{a^4}:$$

$$CL^2\ (bb) :: CL^2\ (bb) : MR^2 = \frac{a^4bb}{bbxx + a^4 + aaxx},$$

Dunque MR²×CD² = *aabb* = CS²×CL². Dunque MR² : CL² :: CS² : CD²; o MR : CL :: CS : CD.

873. Corol. La superficie d'un parallelogrammo formato su i diametri conjugati CM, CD sarebbe uguale a quella di un rettangolo formato su i semi-assi CS, CL; perchè l'una sarebbe misurata da CD×MR, e l'altra da CS×CL. Lo stesso è de' diametri intieri, e degli archi intieri. Dunque la superficie d'un parallelogrammo formato intorno a due diametri conjugati qualunque, è ugual a quella del rettangolo formato intorno agli assi, e per conseguenza ugual anche a quella d'un altro parallelogrammo formato intorno a due altri diametri conjugati qualunque.

Proprietà dell'Iperbole riguardo ai suoi Asintoti.

874. Poichè per tirare gli Asintoti ββ, bB (fig. 93) si è fatto SB, Sβ uguali a CL (842), siegue che *l'angolo degli asintoti* βCB *deve esser acuto, retto o ottuso, secondo che il primo semi-asse* CS *è maggiore, uguale, o minore del suo conjugato* CL. Perchè l'angolo SCB che n'è la metà, è minore, uguale, o maggiore di 45°, secondo che SB è minore, uguale, o maggiore di CS.

875. Le diagonali SL, Cβ del rettangolo CLβS formato su semi-assi, essendo uguali, e tagliandosi in due ugualmente in Y, si ha SY = CY, e CY² o SY² = $\frac{1}{4}$ CS² + $\frac{1}{4}$ CL² = $\frac{1}{4}$ *aa* + $\frac{1}{4}$ *bb*.

876. Quando l'angolo degli asintoti è retto, l'Iperbole si chiama *equilatera*; donde apparisce:

1.° Che *il parametro d'un' Iperbole equilatera è ugual a ciascuno degli assi, che son allora uguali.*

2.° Che contando le ascisse dal vertice, *l'equazione all'asse principale d'un Iperbole equilatera è* $yy = 2ax + xx$, e contando le ascisse dal centro, $yy = -aa + xx$; a causa di $a = b$ e di $p = 2a = 2b$, che bisogna sostituire nelle equazioni agli assi dell'Iperbole.

3.° Che l'equazioni al circolo essendo $yy = 2ax - xx$, e $yy = aa - xx$, secondo che le ascisse son contate dal vertice o dal centro, *il circolo è all'Iperbole equilatera, quel che l'Ellissi è all'Iperbole ordinaria.*

877. Teor. V. *Prolungando da una parte e l'altra un'ordinata qualunque* PM *all'asse principale fin agli asintoti* in A, a, *si ha* $AM \times Ma = CL^2$, *o* AM : CL :: CL : Ma.

Dim. Dall'equazione $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$ (849) si trae bb o $CL^2 = \frac{bbxx}{aa} - yy = (\frac{bx}{x} - y) \times (\frac{bx}{a} + y)$. Or a causa de' triangoli simili CSL, CAP, si ha CS : CL :: CP : $PA = \frac{bx}{a}$; dunque $AM = \frac{bx}{a} - y$, e $Ma = \frac{bx}{a} + y$; dunque $AM \times Ma = CL^2$.

878 Corol. Dunque si ha anche $lV \times lu = CL^2 = AM \times Ma = am \times mA \times iu \times iV$.

879. Teor. VI. *Se per un punto* M *d'un' Iperbole si tira all'asintoto vicino* CA *una retta* MR *parallela*

lela all' altro asintoto CB, *si ha* MR×RC = CY^2 = SY^2, o MR : SY :: SY : RC.

Dim. Si tiri MX parallela ad AC per aver MX = RC. Per i triangoli simili MAR, $S\beta Y$, si ha MR : SY :: MA : $S\beta$ o CL. Or (877) MA : CL :: CL : M*a*. E per i triangoli simili $S\beta Y$ M*a*X, si ha $S\beta$ o CL : M*a* :: βY o SY : MX o RC. Dunque MR : SY :: SY : RC.

880. Corol. I. Ogni retta, come MR, tirata da uno de' punti dell' Iperbole all' asintoto CB, può riguardarsi come un'ordinata, di cui l'asintoto CA è la linea delle ascisse. Perchè l' asintoto CB essendo una tangente all'Iperbole, la sua posizione determina (781) quella delle ordinate; l' origine delle ascisse è in C, onde CR è l'ascissa di questa ordinata MR. Se dunque si fa CR = *x*, MR = *y*, CY o SV = *d*, si avrà $xy = dd$, o $xy - \frac{1}{4}aa = \frac{1}{4}bb$ per l' equazione dell' Iperbole rapporto ai suoi asintoti.

881. Coroll. II. Se si prolunga MR fin all' Iperbole conjugata *d*LD, si avrà DR = RM. Perchè DR × CR = CY^2 = MR × CR.

882. Teor. VII. *Le due parti* EG, FI (fig. 104) *di una retta qualunque* FE *tirata a traverso un' Iperbole, e intercette tralla curva e gli asintoti, son uguali fra loro.*

Dim. Per i punti G, *l* facciansi passare DT, BQ perpendicolari all' asse; si ha (878) DR × RT o GT × GD = B*l* × *l*Q; dunque *l*Q : GT :: GD : B*l*. Ma per le parallele DT, BQ, i triangoli GTE, E*l*Q son simili, come anche FB*l*, FGD, dunque GD : B*l* :: GF. *l*F. E*l*Q : TG :: *l*E : GE. Dunque GT : *l*F :: *l*E : GE : EGF — *l*F : *l*F :: *l*E — EG. Dunque *l*G : *l*F :: *l*G : GE. Dunque *l*F = GE.

883. Corol. I. Quindi si ricava una maniera di descriver un' Iperbole fra due asintoti dati, e che passi per un dato punto *l*. Poichè se per questo punto *l* si fan passare quante rette si vuole AP, BQ, FE &c., prendendo PH = A*l*, QK = B*l*, GE = F*l* &c., si avranno i punti H, K, G &c. per ove l'Iperbole de-

ve paſsare; indi un de' punti trovati può ſervire come il punto dato *l*, per determinarne degli altri.

884. Coroll. II. Se diverſo dal punto *l* ſe ne prende un altro al di dentro o al di fuori dell' Iperbole RSH già deſcritta, ſe ne potrà deſcriver un' altra che avrà gli ſteſſi aſintoti, e che non incontrerà l' Iperbole RSH che all' eſtremità de' ſuoi rami infiniti.

885. Corol. III. *Una tangente ſe terminata agli anſitoti è diviſa in due ugualmente dal punto del contatto* t. Perchè ſe la retta FE tirata ad arbitrio non entraſse che infinitamente poco nell' Iperbole, i punti G, *l* ſarebbero confuſi al punto del contatto, e tanto ſi avrebbe FI = GE.

886. Corol. IV. *Una tangente* eg *terminata agli aſintoti* (fig. 93) *è ugual al diametro* DN *conjugato al diametro* MO *che paſſa pel punto* M *del contatto*. Perchè ſe per M ſi tira MD parallela all' aſintoto CB, ſi ha (881) MR = RD; e per i triangoli ſimili *e* MR, *e*C*g*, ſi ha *e*R = RC. Dunque i triangoli *e*RM, DRC ſon uguali. Dunque DC è parallela e uguale a *e*M; dunque il punto D della retta MD cade ſull' Iperbole DL al punto per ove paſsa il diametro DN conjugato al diametro MO.

887. Teor. VIII. *Se da due punti qualunque* I, R (fig. 104) *preſi ſopra un' Iperbole, ſi tiran ad arbitrio due parallele* IA, RX *terminate all' aſintoto vicino, e due altre parallele* IE, RY *terminate all' altro aſintoto, ſi ha* IA×IE = RX×RY.

Dim. Le perpendicolari a l' aſse EQ, DT terminate agli anſitoti, e tirate per i punti I, R, forman i triangoli ſimili BIA, DRX, e IQE, TRY. Dunque IB: IA :: DR: RX. E IQ: IE :: RT: RY. Dunque IE×IQ: IA×IE :: DR×RT: RX×RY. Or BI×IQ = DR×RT (878); dunque IA×IE = RX×RY.

888. Corol. I. *Se a traverſo d' un' Iperbole ſi tiran due rette ad arbitrio* FE, ZY *parallele fra loro e terminate agli aſintoti, ſi avra ſempre* FI×IE = ZR×RY.

889.

889. Coroll. II. Se una di queſte parallele è tangente in t, ſi avrà $ft^2 = FI \times IE$, &c.

Problemi ſopra le Sezioni Coniche.

890. Probl. I. *Data una porzione di Sezione Conica, determinarne la ſpecie e la poſizione degli aſſi.*

Sol. Si tirino due parallele terminate dall' una e l' altra parte alla ſezione, ſi facci paſſar una retta per i punti de' loro mezzi, queſta ſarà un diametro della ſezione. Si tirino anche due altre parallele, ma obblique alle due precedenti, e pel loro mezzo ſi tiri un altro diametro. Se queſti due diametri ſon paralleli, la ſezione è una Parabola; ſe ſi tagliano nel di dentro della ſezione, è un' Eliſſi; ſe taglianſi al di fuori, è un' Iperbole. Il punto d' interſezione ne ſarà il centro. Perciò ſe da queſto centro ſi deſcrive un arco di circolo che tagli la ſezione data in due punti, la retta che paſſerà per queſto centro e pel mezzo tra i due punti, ſarà l' aſſe. Se la ſezione è una Parabola, ſi tirerà una retta qualunque perpendicolare ai diametri trovati, e terminata da una parte e l' altra alla ſezione, ſi taglierà in due ugualmente e perpendicolarmente da una retta, che ſarà l' aſſe.

891. Probl. II. *Dati di poſizione tre punti* M, m, u, *non in linea retta, e il foco* F (fig. 91) *farvi paſſare una ſezione conica, e determinarne la ſpecie e gli aſſi.*

Sol. Tirate le Mm, mu, facciaſi $FM : Fm :: ME : mE$, e $Fm : Fu :: mH : uH$.

Dalla prima proporzione $FM : Fm :: ME : mE$

convertendo ſi ha $Fm : FM :: mE : ME$

e dividendo. $Fm - FM : Fm :: mE - ME : mE$

ma, $mE - ME = Mm$

dunque $Fm - FM : Fm :: Mm : mE$

dunque $$mE = \frac{Fm \times Mm}{Fm - FM}$$

Nella ſteſſa guiſa dalla ſeconda proporzione $Fm : Fu :: mH : uH$ ſi cava $mH = \frac{Fm \times um}{Fu - Fm}$.

Per i punti trovati E, H ſi tiri la retta indefinita EH, la quale ſarà la direttrice della ſezione. Poichè abbaſſate le perpendicolari MG, *mg*, *uy*, eſſendo ſimili i triangoli *gm*E, GME, ſi ha MG : *mg* :: ME : *m*E :: FM : F*m*. Dunque FM : MG :: F*m* : *mg*. Dunque la linea che paſſa per i punti dati M, *m*, *u*, è (790) una vera ſezione conica. Nella ſteſſa maniera ſi prova che F*m* : F*u* :: *mg* : *uy*, perchè i triangoli *m*H*g*, *u*H*g*, *u*H*y* ſono ſimili.

Così ſe ſi fa paſſare per F le retta PA perpendicolare alla direttrice, queſta ſarà l'aſſe della ſezione. E ſe ſi fa MG : FM :: AS : SF, ſi avrà componendo

MG + FM : FM :: AS + SF : SF, ma

AS + SF = FA, dunque

MG + FM : FM :: FA : SF; dunque

$$SF = \frac{FA \times FM}{MG + FM}.$$

Onde *S* ſarà un de' vertici dell'aſſe.

Se poi ſi fa MG : FM :: A*s* : *s*F, ſi avrà $sF = \frac{FA \times FM}{GM - FM}$;

così ſi avrà l'altro vertice *s* dell'aſſe.

892. Probl. III. *Trovar gli aſintoti d'un' Iperbole di cui ſi hanno ſolamente i due diametri conjugati* MO DN (fig. 93)

1. Sol. Per l'eſtremità M del primo diametro MO ſi tiri *eg* parallelamente al conjugato DN; ſi faccino Mg, Me uguali a CD o CN, e ſi avranno i punti *g*, *e*, per ove gli aſintoti devon paſſare.

893. II. Si congiungano le eſtremità M, D de' due diametri, e pel centro C, e pel punto R nel mezzo di MD ſi tiri CR, che ſarà uno degli aſintoti; l'

altro

altro sarà la parallela a DM tirata dal centro C.

894. Osserv. *Reciprocamente essendo dati gli asintoti e un punto* M *dell' Iperbole, se ne trovan due diametri conjugati*, tirando indefinitamente MD parallela all'ansitoto CB, e facendo DR=MR e le rette MC, DC saran due semi-diametri conjugati. Ovvero tirando per M la tangente *eg* terminata agli asintoti, e facendo passare per C la retta CD parallella e uguale a *Me* o a *Mg*.

895. Probl. IV. *Determinare il raggio di curvatura in un punto qualunque* M *d' una sezione conica* (fig. 98, 99).

Sol. Tirato per il punto dato il diametro MO, e il suo conjugato DN cogli assi *Ss*, L*l*; supposto che il punto K preso su MO sia un punto della circonferenza del circolo che passa per i tre punti infinitamente vicini *m*, M, *u*; allora si ha (531) $u\text{H}\times\text{H}m = \text{MH}\times\text{HK}$, o $m\text{H}^2 = \text{MH}\times\text{HK}$. Or (829) $m\text{H}^2 : \text{MH}\times\text{HO} : \text{CD}^2 : \text{CM}^2$; dunque: $\text{MH}\times\text{HK} : \text{MH}\times\text{HO} :: \text{CD}^2 : \text{CM}^2$. Ovvero $\text{HK} : \text{HO} :: \text{CD}^2 : \text{CM}^2$. E perchè MH è infinitamente piccolo anche rapporto a *m*H, si ha $\text{MK} : \text{MO o } 2\text{CM} :: \text{CD}^2 : \text{CM}^2$. Dunque $\text{MK} = \frac{2\text{CD}^2}{\text{CM}^2}$. Sia ora MA il diametro del circolo osculatore, o che passi per *m*M*u*, tirata la corda AK, il triangolo AKM è rettangolo in K, e simile al triangolo MCR rettangolo in R a causa che MA è perpendicolare all'arco *mu* o alla sua tangente MX, e per conseguenza al diametro conjugato ND. Si ha dunque

$$\text{MR} : \text{MC} :: \text{MK o } \frac{2\text{CD}^2}{\text{CM}} : \text{MA} = \frac{2\text{CD}^2}{\text{MR}}; \text{ dunque } \frac{1}{2}$$

$$\text{MA} = \frac{\text{CD}^2}{\text{MR}}, \text{ vale a dire}$$

1.° *Il raggio della curvatura in un punto qualunque* M *d' una Sezione Conica è ugual al quadrato del semi-diametro conjugato a quello che passa pel punto dato,*

dato, diviso per la perpendicolare tirata da questo punto sul diametro conjugato. Ma (872) $MR = \frac{CL \times CS}{DC}$, Dunque $\frac{1}{2}\ MA = \frac{CD^2}{CL \times CS}$, vale a dire

2.° *Il raggio della curvatura in un punto qualunque* M *d'una Sezione Conica è ugual al cubo del semi-diametro conjugato a quello che passa pel punto dato, diviso per il prodotto de due semi-assi.*

896. Dal foco F e dal centro C si abbassino sulla tangente M le perpendicolari CI, FG; si ha (872) $MR^2 : CS^2 :: CL^2$, o $MR \times MN : CD^2 = \frac{CS^2 \times MN}{MR}$. Or $\frac{1}{2}\ MA = \frac{CD^2}{MR}$, dunque $\frac{1}{2}\ MA = \frac{CS^2 \times MN}{MK^2}$. Ma il parametro p dell'asse Ss è $p = \frac{2CL^2}{CS}$, e $\frac{1}{2}\ p = \frac{CL^2}{CS}$; dunque $\frac{1}{2}\ p \times CS = CL^2 = MR \times MN$, dunque $MR = \frac{p \times CS}{2MN}$, e $MR^2 \frac{pp \times S^2}{MN^2}$. Dunque sostituendo $\frac{1}{2}\ MA = \frac{4MN^3}{pp} = \frac{MN^4}{\frac{1}{4}\ pp}$. Vale a dire

3.° *Il raggio della curvatura in un punto qualunque* M *d'una sezione conica, è uguale al cubo della normale diviso pel quarto del quadrato del paramento dell'asse principale.*

Nella Parabola la formola del raggio di curvatura è $\frac{(4px + pp)\sqrt{(4px + pp)}}{2pp}$. Perchè (844) $NM^2 = px + \frac{1}{4}\ pp$. Dunque $4NM^2 = 4px + pp$, e $4NM^3 = (4px + pp)\sqrt{(px + \frac{1}{4}\ pp)}$. Or facendo entrar 4 nel radicale $\sqrt{(px + \frac{1}{4}\ pp)}$, senza cambiarne il valore, si ha $\sqrt{(px}$

$(px + \frac{1}{4}pp) = \frac{1}{2}\sqrt{(4px + pp)}$, perchè $\frac{1}{2}\sqrt{(4px+pp)} = \sqrt{(\frac{4}{4}px + \frac{1}{4}pp)} = \sqrt{(px + \frac{1}{4}pp)}$. Dunque $4NM^3 = (4px + pp)\frac{1}{2}\sqrt{(4px + pp)}$, e $\frac{4NM^3}{pp} = \frac{(4px+pp)\sqrt{(4px+pp)}}{2pp}$. Nelle altre sezioni le formole sono molto più complicate.

897. Probl. V. *Trovar la quadratura delle Sezioni Coniche.*

Sol. Per la Parabola. Sia proposto di quadrar lo spazio *Sn*MP (fig. 97); l' origine delle ascisse essendo al vertice *S*, si ha $PM = y = \sqrt{px}$; sia $p = 1$, dunque $y = \sqrt{x}$, o $y = x^{\frac{1}{2}}$. Dunque per aver la somma delle ordinate comprese tra S e MP, non si ha da far altro che sommar la serie $1^{\frac{1}{2}} . 2^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{1}{2}} . 4^{\frac{1}{2}} .. x^{\frac{1}{2}}$, di cui la somma è (345) $\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $x = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = (138)\frac{2}{3}x\sqrt{x}$; ovvero perchè $y = \sqrt{x}$, $= \frac{2}{3}xy$. Dunque *lo spazio parabolico* SMP *è i* $\frac{2}{3}$ *del prodotto dell' ascissa per l' ordinata*, o sia dell'aja del parallelogrammo SPML.

898. Corol. I. Se si tira la retta SM, il segmento parabolico *SMn* è $\frac{1}{6}xy$; perchè la sua aja è uguale all' aja SPM*n* meno l'aja del triangolo rettangolo SPM, cioè $= \frac{2}{3}xy - \frac{1}{2}xy = \frac{1}{6}xy$.

899. Corol. II. L'aja del segmento *SMn* è la metà dell' aja del trilineo M*n*SL, perchè questo trilineo $= \frac{1}{3}xy$.

900. Corol. III. Se il punto P fosse nel foco, si avrebbe $x = \frac{1}{4}p$, e $y = \frac{1}{2}p$; dunque $\frac{2}{3}xy = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}p \times \frac{1}{2}p = \frac{1}{12}pp$. Cioè l'aja sarebbe $\frac{1}{12}$ del quadrato del parametro.

901. Sol. Per l'Eliſſi. Contando le aſciſse dal centro, l' equazioni all' Eliſſi e $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$; o $yy = \frac{bb}{aa} \times (aa - xx)$; dunque $y = \frac{a}{b} \times \sqrt{aa - xx}$. Dunque (788) ciaſcuna di tutte le ordinate poſſibili tra CL, e PM (fig. 100) è $\frac{b}{a} \times a - \frac{b}{a} \times \frac{xx}{2a} - \frac{b}{a} \times \frac{x^4}{8a^3} - \frac{b}{a} \times \frac{x^6}{16a^5} - \frac{b}{a} \times \frac{5x^8}{128a^7}$, &c. Ovvero $b - \frac{bxx}{2aa} - \frac{bx^4}{8a^4} - \frac{bx^6}{16a^6} - \frac{5bx^8}{128a^8}$, &c. Dunque queſta ſerie ſommata tante volte, quante ſono le aſciſſe poſſibili dal centro C fin a P, darà la ſomma di tutte queſte ordinate, o l'aja CLMP. Dunque ſupponendo per tutte queſte aſciſse la ſerie infinita 1. 2. 3. 4. 5 ..... x, ſi vede 1.° Che $b \times x$, o bx eſprime la ſomma di tutti i primi termini b della ſerie $b - \frac{bxx}{2aa} - \frac{bx^4}{8a^4}$ &c.

2.° Che la ſomma di tutti i ſecondi termini $-\frac{bxx}{2aa}$ è ugual a $-\frac{b}{2aa}$ moltiplicato per la ſomma di tutti i quadrati de' termini della ſerie infinita 1. 2. 3. 4..... x, la quale è (344) $= \frac{x^3}{3}$: dunque la ſomma di tutti i ſecondi termini è $-\frac{bx^3}{6aa}$.

3.° Che la ſomma di tutti i terzi termini $-\frac{bx^4}{8a^4}$ è uguale a

— mol-

$\frac{b}{8a^4}$ moltiplicato per la ſomma di tutte le quarte potenze de' termini della ſerie 1.2.3.4.....x, la quale è $\frac{x^5}{5}$; dunque la ſomma di tutti i terzi termini è $\frac{bx^5}{40a^4}$. Nella ſteſſa maniera ſi trova che la ſomma di tutti i quarti termini $\frac{bx^6}{16a^6}$ è $\frac{b}{16a^6} \times \frac{x^7}{7} = \frac{bx^7}{112a^6}$; che quella di tutti i quinti termini è $\frac{5bx^9}{1152a^8}$ &c. Così che lo ſpazio CLMP è eſpreſſo dalla ſerie infinita, $bx - \frac{bx^3}{21} - \frac{bx^5}{6aa} - \frac{bx^7}{40a^4} - \frac{5bx^9}{112a^6} - \frac{7bx^{11}}{1152a^8} - \frac{21bx^{13}}{2816a^{10}} - \frac{6aa}{13312a^{12}}$ &c. la quale non ha potuto finora eſſer ſommata in termini finiti, il che dimoſtra che la quadratura aſſoluta dell' Eliſſi è incognita.

902. Coroll. I. Se ſi fa $x = a$, allora ſoſtituendo ſi avrà $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab$ &c. per lo ſpazio compreſo nel quarto d' Eliſſi CLMS. E ſe a e b eſprimon i due aſſi intieri dell' Eliſſi, queſta ſerie darà l' aja intiera dell' Eliſſi.

903. Coroll. II. Se $a = b$, allora l' Eliſſi è un Circolo, e la ſerie $aa - \frac{1}{6}aa - \frac{1}{40}aa - \frac{1}{112}aa$ dà la quadratura d' un quarto di circolo, o d' un circolo intiero, ſe a eſprime il diametro.

904. Coroll. III. Quindi ſiegue che *l' aja d' un' Eliſſi è a quella di un circolo deſcritto ſul ſuo grand' aſſe, come*

come $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab$ &c. ad $aa - \frac{1}{6}aa - \frac{1}{40}aa$ &c.

vale a dire, come *ab* ad *aa*, ovvero come *b* ad *a*, e per conseguenza *come il piccolo asse è al grand' asse*. E se il circolo avesse il piccol asse per diametro, la sua aja sarebbe a quella dell' Elissi, come il piccol asse al grand' asse.

905. Similmente *la porzione* CPNO *del circolo è alla porzione* CPML *dell' Elissi, come il grand' asse è al piccol asse*, o come *a* a *b*. Perchè l'una è espressa da $ax - \frac{ax^3}{6aa} - \frac{ax^5}{40a^4}$, &c., e l' altra da $bx - \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4}$; &c.

Lo stesso si può dire delle aje PNS, PMS. Tutto ciò è d'altronde evidente, perchè queste sorte di aje circolari non sono che somme di ordinate, le quali sono (852) tutte alle ordinate corrispondenti dell' Elissi (di cui le somme son le aje Elittiche) come il grand'asse è al piccol'asse.

906. Corol. IV. *Se da un punto* A *qualunque preso sull' asse d' un' Elissi iscritta o circoscritta a un circolo, si tiran alle estremità* M, N *d' un' ordinata comune* PN *le rette* AM, AN, *l' aja del settore circolare* SAN *è a quella del settore elittico* SAM, *come l' asse ch' è il diametro del circolo, è all' altro asse.*

Perchè l'aja circolare SPN è in questo rapporto coll' aja elittica SMP; e l'aja del triangolo rettangolo PAN è a quella del triangolo PAM che ha una stessa base PA, come PN a PM. o (852) come CO a CL, cioè come l'asse che serve di diametro al circolo è all' altro asse. Dunque l'aje totali SAN, SAM son in questo rapporto.

907. Corol. V. *L' aja d' un' Elissi è ugual a quella d' un*

d'un circolo, il di cui diametro è medio proporzionale tra gli assi dell'Ellissi.

Sia d il diametro di questo circolo, sarà (271) $dd = ab$. L'aja del circolo è (858) $dd - \frac{1}{6}dd - \frac{1}{40}dd$ &c. $= ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab$ &c.

908. Corol. V. *Le superficie di due Ellissi qualunque son fra loro come i prodotti de' loro assi.* Perchè sieno a, b gli assi dell'una; c, d gli assi dell'altra; saranno le loro aje $ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab$ &c. $cd - \frac{1}{40}cd$ cd, &c.: queste due serie son evidentemente fra loro come ab a cd.

Sol. Per l'Iperbole. Facendo il primo semi-asse SC $= b$ (fig. 96) e C$l = a$, l'ascissa CH $= x$, l'ordinata MH $= y$; si ha (849) $yy = \frac{aabb + bbxx}{aa}$, o $yy = \frac{bb}{aa}(aa + xx)$; dunque $y = \frac{b}{a}\sqrt{aa + xx}$; dunque ciascuna ordinata compresa tra CS e HM, è $b + \frac{bxx}{2aa} - \frac{bx^4}{8a^4} + \frac{bx^6}{16a^6} - \frac{5bx^6}{128a^8}$ &c.

E siccome questa serie non differisce da quella dell'Ellissi, che ne' segni de' termini pari, seguitando lo stesso ragionamento fatto per l'Ellissi, si trova:

1.° Che l'aja iperbolica SCHM deve esser espressa dalla serie $bx + \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} + \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ &c.

2.° Che se si toglie l'aja del rettangolo SCHI $= bx$, resta l'aja del trilineo iperbolico SIM $= \frac{bx^3}{6aa} - \frac{bx^5}{40a^4} + \frac{bx^7}{112a^6}$ &c.

3.° Che

3°. Che nell' Iperbole equilatera, ove $b = a$, se $a = x$, si ha $aa + \frac{1}{6}aa - \frac{1}{40}aa + \frac{1}{112}aa$, &c.

E la stessa analogìa si può seguire tra l' Iperbole equilatera e un' Iperbole qualunque, come si è fatta quella ch' è tra il Circolo e l' Ellissi.

909. Per l' Iperbole tra i suoi asintoti. Sia proposto di quadrare lo spazio ARMZ (fig. 93.) compreso tra le due ordinate AZ, RM. Prendendo l' origine delle Ascisse in R, sia $CY^2 = a$, $CR = b$, $RA = x$, $AZ = y$; si ha (879) $CA \times AZ = CY^2$, ovvero $by + xy = aa$.

Dunque $y = \frac{aa}{b+x} = \frac{aa}{b} - \frac{aax}{bb} + \frac{aax^2}{b^3} - \frac{aax^3}{b^4} + \frac{aax^4}{b^5}$ &c.

La somma di ciascuno de' termini di questa serie preso tante volte, quanti termini vi sono nella serie infinita 1. 2. 3. 4. 5. ..... x sarà questa serie infinita $\frac{aax}{b} - \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^3}{3b^3} - \frac{aax^4}{4b^4}$ &c. ugual all' aja ARMZ. Questa serie sarà tanto più convergente, quanto x sarà più piccolo di b.

910. Corol. Se si fa $b = a$, vale a dire se l' origine delle ascisse fosse in Y, lo spazio SYAZ sarebbe $ax - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}\frac{x^3}{a} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{aa} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{a^3}$ &c. E se si fa $a = 1$, si avrà $x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c.

911. Osserv. I. Se fatto $CY = 1$, si prendono le ascisse CR, CA, Ct in progressione geometrica: sia $CA = f$, $At = z$, si avrà dunque $f = b + x$, $Ct = f + z$. Dunque la progressione darà $b : b + x :: f : f + z$, e per conseguenza $\frac{x}{b} = \frac{z}{f}$; donde apparisce,

che

ne l' aja RMZA, la quale è $\frac{x}{b} - \frac{x^2}{2b^2} + \frac{x^3}{3b^3} -$

$\frac{x^4}{b^4}$ &c. è ugual all' aja AZK*t*, che è $\frac{z}{f} - \frac{z^2}{2f^2} +$

$\frac{z^3}{3f^3} - \frac{z^4}{4f^4}$ &c.

Dunque le aje iperboliche che han per baſi le differenze delle aſciſſe in progreſſione geometrica, ſon tra loro uguali.

Donde ſi vede, che ſe CY, CR, CA, C*t* ſon aſciſſe tali, che rappreſentino la ſerie delle quantità in progreſſione geometrica $\div\div q^0.q^1.q^2.q^3.$, le aje, di cui YR, RA, A*t* ſono le baſi, eſſendo uguali, le aje, di cui YR, YA, Y*t* ſono le baſi, ſon tra loro come la ſerie de' numeri 1, 2, 3. Dunque ſon come gli eſponenti delle quantità CR, CA, C*t*; e per conſeguenza come i logaritmi di queſte ſteſſe quantità. Dunque *ſi poſſon calcolar i logaritmi per mezzo delle aje iperboliche*: e reciprocamente.

912. Oſſerv. II. Se ſi voleſſe l' eſpreſſione dell' aja compreſa tra l' aſintoto BC, la parte CR dell' altro aſintoto, l' ordinata MR, e il ramo infinito MSi; a cauſa dell' equazione $aa = xy$ (880), ſia CY o $a = 1$; dunque $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

Os (345) la ſomma di tutti li x^{-1} è $\frac{x^{-1+1}}{-1+1} - \frac{x^0}{0} = \frac{1}{0}$.

Dunque perchè il quoziente di 1 diviſo per $0 = \frac{1}{0}$ infinito, queſto ſpazio è infinito.

913. Se con un piano ſi vuol tagliar un Cono retto in due parti, non ſi potrà farlo che nelle cinque maniere eſpreſſe (789), delle quali le tre ultime Sezioni

ni danno le tre equazioni alla Parabola, all' Elissi, all'Iperbole.

Dim. Per la Parabola. Si faccia passare (fig. 101) un piano parallelo a quello della base, la sezione sarà un circolo EMD, perchè sarà uno degli elementi del Cono. Or siccome i due circoli EMD, B*m*C son tagliati in MM, e in *mm* dalla sezione; poi in ED e in BC dal piano del triangolo ABC, che si suppone tra tutti i piani triangolari traversanti il Cono lungo l'asse, esser quello che sia perpendicolare al piano tagliante; è chiaro (621) che le rette MM, *mm* son parallele fra loro, come anche i diametri ED, BC. Or a causa che il piano ABC è perpendicolare al piano tagliante, *mm* è perpendicolare a BC, dunque MM è perpendicolare a ED. Di più, essendo i diametri ED, BC tagliati in P, e in *p* dall'asse *Sp* della sezione, questo asse è (611) nel piano di questi diametri o del triangolo ABC; dunque MM, *mm* son anche perpendicolari a *Sp*. Onde le rette *pm*, PM son ordinate comuni ai circoli B*m*C, EMD, e alla sezione *m*Sm. Ma (530) $pm^2 = Bp \times pC$, e $PM^2 = EP \times PD$. Dunque $pm^2 : PM^2 :: Bp \times pC : Ep \times PD$. Ma a causa delle parallele AB, *Sp*, si ha EP = B*p*; dunque $pm^2 : PM^2 :: pC : PD$. E a causa de' triangoli simili SPD, S*p*C, si ha *p*C: PD:: *Sp*: SP. Dunque la curva *m*S*m* è tale che i quadrati delle sue ordinate son tra loro come le loro ascisse; dunque (830) questa curva è una Parabola.

914. Dim. per l' Elissi (fig. 102). Avendo fatto passare due piani paralleli alla base del Cono, si avran due circoli E*m*F, GMH, che taglieranno il piano della sezione, e si vedrà come sopra, che *mp*, MP son ordinate comuni al circolo e alla sezione: e che per la proprietà de'circoli si ha $mp^2 : MP^2 :: Ep \times pF : GP \times PH$. Ma per i triangoli simili SPH, S*p*F, e *s*E*p*, *s*GP, si ha *p*F: PH :: *Sp*: SP; e E*p*: GP :: *sp*: SP. Dunque $Ep \times pF : GP \times PH :: sp \times Sp : sP \times SP$. Dunque $pm^2 : PM^2 :: sp \times Sp : sP \times SP$. Dunque la sezione *s*MS è una curva tale, che i quadrati delle sue ordi-

nate

nate ſon tra loro come i prodotti delle aſciſſe. Dunque, ella è un' Eliſſi (829) La dimoſtrazione ſarebbe la ſteſſa, ſe il ſolido ABC foſſe un cilindro retto.

915. Dimoſt. per l'Iperbole (fig. 103) A cauſa de' circoli EMD, B*m*C, ſi ha $pm^2 : PM^2 : PM^2 :: Bp \times pC : EP \times PD$. Or a cauſa de' triangoli ſimili DPS, C*p*S, e *ps*B, P*s*E, ſi ha *p*C : PD :: *p*S : PS, e *p*B : PE :: *ps* : *s*P. Dunque $pC \times pB : PD \times EP :: pS \times ps : PS \times sP$. Dunque ſoſtituendo $pm^2 : PM^2 :: pS \times ps : PS \times Ps$: e queſta è la proprietà dell' Iperbole (829).

916. Corol. E' chiaro che ſe ſi fa paſſare pel vertice del Cono un piano parallelo a quello della ſezione, queſto piano toccherà il Cono nel caſo della Parabola. Egli ſarà totalmente al di fuori nel caſo dell' Eliſſi; e entrerà nel Cono nel caſo dell' Iperbole. E ſe ſi applican due piani che tocchino l'Iperbole lungo le linee rette, ſecondo le quali queſto piano che paſſa pel vertice taglia la ſuperficie del Cono, le interſezioni di queſti due piani col piano delle Iperboli ne ſaranno gli aſintoti. Or poichè queſti due piani toccano ciaſcun elemento del Cono in quello de' loro punti, che è in un piano parallelo a quello della ſezione, non potranno più toccare alcuno di queſti elementi in un altro punto; dunque non potranno incontrare l' Iperbole, perchè il ſuo piano è parallelo a quello, in cui ſon tutti i punti di contingenza.

CAPITOLO III.

Di varie Curve Principali.

917. QUì non ſi tratta di quelle linee curve, che ſi poſſon delinear a caſo, ed irregolarmente ſulla carta. Non avendo tali linee altra legge che la mano che le forma, non poſſon eſſer l'oggetto della Geometria; poſſon eſſerlo ſolamente dell'arte di ſcrivere.

918. Si è già veduto (780) che vi ſono due generi di Curve, alcune *Geometriche o Algebraiche*, che ſon quelle, nelle quali la relazione delle Aſciſſe alle Ordinate è, o può eſſer eſpreſſa da un'equazione algebraica. E l'altre Curve Meccaniche e Traſcendenti, l'equazione delle quali tralle coordinate non è, nè può eſſer algebraica, vale a dire finita. Tra queſti due generi di Curve ſi può metter, 1°. le *Curve Eſponenziali*, nell'equazione delle quali una delle incognite o tutte due entrano in eſponente, come ſe una Curva daſſe per equazione $y = ax$, ovvero $yx = ay$ &c. 2°. *Le Curve interſcendenti*, nell'equazione delle quali gli eſponenti ſono radicali, come $x = y\sqrt{2}$. Queſte due ſpecie di Curve non ſono propriamente nè geometriche, nè meccaniche, perchè la loro equazione è finita ſenza eſſer algebraica.

919. Gli antichi non han conoſciuto altre Curve Geometriche, che il Circolo, le Sezioni Coniche, la Concoide, e la Ciſsoide, perchè poco conoſcevan l'Algebra, ſenza di cui poco ſi può trattare di Curve.

920. *Curve algebraiche dello ſteſſo genere* diconſi quelle, l'equazioni delle quali montan ad una ſteſſa dimenſione.

Famiglia delle Curve chiamaſi l'unione di più Curve di diverſo genere, le quali ſi definiſcon tutte per la ſteſſa equazione di un grado indeterminato, ma diverſo ſecondo la diverſità del genere. Sia per eſempio l'equa-

l'equazione d'un grado indeterminato a $x^{m-1} = y^m$; se $m = 2$, sarà $ax = y^2$; se $m = 3$, sarà $a^2x = y^3$; se $m = 4$, sarà $a^3x = y^4$. Tutte queste Curve diconsi della *stessa famiglia*.

Perciò tutte le Curve Algebraiche fanno una certa *famiglia* composta d'innumerabili altre, ciascuna delle quali abbraccia infiniti generi.

Delle Curve Algebraiche se ne son vedute già quattro che sono le Sezioni Coniche, resta di vederne alcune altre principali.

Concoide di Nicomede.

921. Tratte due linee BD, AG perpendicolari (figura 105) l'una all'altra, e posti sulla linea AEG tre punti A, F, G, de' quali i due primi sien in ugual distanza da E; se dal punto G si tiran le rette GFEA, GOM, GQM, e quante altre si vorranno; e se sopra queste linee, tanto al di sopra di BD come al di sotto, si fanno le parti QM, QN, QM &c. tutte uguali ad AE: Ciò fatto, le due linee MMAM, NFN terminate dalle estremità di queste linee rette, saranno le due parti d'una stessa curva geometrica, detta *Concoide* di Nicomede, perchè questi ne fu l'Inventore. Il punto G dicesi il polo della *Concoide*; la linea BD il suo *asintoto*; e la parte costante AE *la sua regola*.

Questa curva può anche descriversi con uno stromento (fig. 106) composto della squadra AEDKG, nel di cui braccio AD è un canale rappresentante l'asintoto della curva, e nell'altro braccio un perno K, che sarà il *polo* della Concoide. Alla riga CFKB è attaccato un chiodo F che passa nel canale AD, dove ha la libertà di scorrere. C, *c* sono due stiletti o lapis attaccati alla stessa riga ugualmente distanti dal chiodo F. Nella stessa riga è un canaletto OK, il di cui principio O è tanto distante da F, quanto K da E.

Ciò posto, se si fa muover la riga CD in maniera che il chiodo F non esca mai dal canale AD, e che il canale OB passi sempre nel perno K, i due lapis posti in C e *mc* descriveranno le due braccia CH, *ch* della *Concoide*. Si è detto, che la linea AD è l' asintoto di questa curva, cioè ella vi si avvicinerà sempre senza mai incontrarla; perchè la linea CF costante inclinandosi sempre senza giammai stendersi sopra AD, il punto C deve sempre accostarsi alla retta AD, senza mai arrivarci.

922. *Trovar l' equazione per la Concoide*:

Sia $a = QM = AE$, $b = EC$, $x = MR = EP$, $y = ER = PM$; sarà $CP = b + x$, e $PE\ (x) : MQ\ (a) :: EC\ (b) : CQ = \frac{ab}{x}$. Onde $CM = a + \frac{ab}{x} = \frac{ax + ab}{x}$. E poichè $PM^2 + PC^2 = CM^2$, sarà $y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = \frac{a^2b^2 + 2a^2bx + a^2x^2}{x^2}$, dunque $x^4 + 2bx^3 + y^2x^2 + b^2x^2 = a^2b^2 + a^2bx + a^2x^2$. Questa è l'equazione d'una parte della *Concoide*.

Se poi si fa $b = CE$, $a = QN$, $x = EG = ON$, $y = EO = GN$, seguendo il metodo di sopra si avrà $x^4 + 2bz^3 + b^2x^2 + x^2y^2 = a^2b^2 - 2a^2bx + a^2x^2$. Ch' è l'equazione dell'altra parte della *Concoide*. Onde si vede che la Concoide è una linea del terzo genere.

923. Si possono formar altre Concoidi analoghe a questa.

Se per esempio, QM (fig. 105) non fosse più costante, ma di tal grandezza, che $GE^m : GQ^m :: QM^m : AE^m$, ne nascerebbe una curva, che avrebbe ancora BD per asintoto, e si potrebbe chiamar anche *Concoide*.

Onde se $b = GE$, $a = AE$, $x = EQ$, $y = QM$;

$n\ m \qquad m\ n$

farà

sarà $ab = xy$, e per infinite Concoidi a b = x y.

924. Lo spazio Concoidale, cioè lo spazio racchiuso tra la Concoide ed il suo asintoto, è infinito. Poichè

AEQM> di $ab\,(log.\,x + \sqrt{x^2 + b^2} - log.\,b)$. Or questa quantità è ∞, lorchè $x = \infty$. Dunque &c.

Cissoide di Diocle.

925. Sul diametro (fig. 107) AB del semicircolo AOB si tiri una perpendicolare indefinita BC, e dall' estremità A si tirino le rette AH, AC ne' due quarti di circolo OB, AO: si faccia $Am = IH$, e nell'altro quarto di circolo $AN = LC$. I due punti m, L apparterranno ad una curva $AmOL$ chiamata Cissoide, inventata da Diocle.

926. Dalla generazione di questa curva risultano le proprietà seguenti.

1.° Tirate le rette KI, PN perpendicolari ad AB, si avrà AP: KB:: Am: IH, ma $Am = IH$, dunque $AK = KB$, dunque $AK = PB$, e $PN = IK$.

2.° La Cissoide AmO taglia la semicirconferenza AOB in due parti uguali nel punto O.

3.° Essendo AK : KI :: KI : KB, cioè AK: PN:: PN : AP; ed inoltre AK : PN : : AP : PM, sarà dunque PN : AP : : AP : Pm, e per conseguenza AK, PN, AP, Pm, son quattro linee in proporzione continua. Nella stessa guisa si proverà, che AP, Pm, AK, KL son in proporzione continua.

927. *Trovar l'equazione della Cissoide.*

Sia $AB = a$, $AP = x$, $Pm = y$; sarà $AK = PB = a - x$, e $KI^2 = PN^2 = ax - x^2$. Dunque $AK^2\,(a^2 - 2ax + x^2) : PN^2\,(ax - x^2) : : AP^2\,(x^2) : Pm^2\,(y^2)$. Dunque $a^2y^2 - 2axy^2 + x^2y^2 = ax^3 - x^4$; ovvero dividendo tutto per $a - x$, sarà $ay^2 - xy^2 = x^3$, cioè $(a - x)\,y^2 = x^3$.

Quindi si vede che nella Cissoide il cubo dell'ascissa AP è ugual ad un solido formato dal quadrato della

ſemiordinata P*m*, e del compimento PB al diametro del circolo generatore.

Onde lorchè il punto P caſca in B, ſarà PB $= o$, e $y^2 = \frac{a^3}{o}$, dunque $o : 1 :: a^3 : y^2$, vale a dire il valore di y divien infinito. Perciò la Ciſſoide A*m*OL benchè ſi accoſti continuamente alla retta BC, non la incontra però giammai.

Dunque BC è l'aſintoto della Ciſſoide, la qual è una linea del ſecondo genere.

Gli Antichi facevan uſo della Ciſſoide, per trovare due mezze proporzionali tra due rette date. Supponendo infatti, che ſi cercano due mezze proporzionali tralle due date AK, P*m*, ſuppongaſi delineata la *Ciſſoide*; prendendo poi ſull'aſſe AB una porzione $=$ AK, e tirando l'ordinata della *Ciſſoide* $=$ P*m*, ſi troveranno le mezze proporzionali PN, AP.

Curve Meccaniche, o Traſcendenti.

928. Tralle Curve Meccaniche o Traſcendenti che ſon quelle che non hanno tralle coordinate equazione algebraica o finita, gli Antichi non conoſcevano, che la Quadratrice di Dinoſtrate, e la Spirale d' Archimede.

Quadratrice di Dinoſtrate.

929. Dividaſi il quarto del circolo ANB (fig. 108) in qualunque numero di parti uguali in N, *n*, *n* &c. Dividaſi il raggio AC in ugual numero di parti uguali in P, *p*, *p* &c. Si tirino i raggi CN, C*n* &c., e ſopra i punti P, *p*, &c. s' inalzino le perpendicolari PM, *pm* &c. Si congiungano queſte linee, la curva AM*mm*D è la *Quadratrice* di Dinoſtrate.

Dalla coſtruzione appariſce, che AB : AN :: AC : AP. Onde ſe ſi fa AB $= a$, AC $= b$, AN $= x$, AP

AP $=$ y, sarà $ay = bx$. Per mezzo di questa curva cercava Dinostrate meccanicamente la quadratura del circolo.

Quadratrice di Tschirnhausen.

930. Dividasi il quarto di circolo ANB (fig. 109), e'l suo raggio AC in ugual numero di parti come nel primo caso. Dai punti P, p &c. si tirino le rette PM, pm &c. parallele a CB, e dai punti N, n &c. le NM, nm &c. parallele ad AC; si uniscan i punti A, M, m &c., e si ha la curva AMmmB, che è la *Quadratrice* inventata da Tschirnhausen anche per la quadratura del circolo.

Poichè AB : AN : : AC : AP, anche questa curva avrà l'equazione $ay = bx$.

Spirale di Archimede.

931. La periferia del circolo (fig. 110.) AppA dividasi in quante parti uguali si vuole; ed in altrettante si divida il raggio CA. Si faccia indi CM $=$ ad una parte del raggio, Cm $=$ 2 parti del raggio, a 3 &c. La curva Mmm è la *Spirale* inventata da Archimede.

Anche questa curva serve per la quadratura meccanica del circolo. Poichè essendo AP: alla periferia:: CM: al raggio; se le periferia $= p$, AC $= r$, AP $= x$, PM $= y$; sarà CM $= r - y$, dunque $p : r :: x : r - y$, dunque $pr - py = rx$. E se CM $= y$, si avrà $rx = py$, equazione comune alle Quadratrici.

Logaritmica.

932. Se la retta AX (fig. 111) si divide in un numero qualunque di parti uguali, e se per i punti A, P, p &c. di divisione si tirino le parallele fra loro, e continuamente proporzionali; le estremità N, M, m &c.

&c. di queſte ultime linee, formeranno la *Logaritmica*, o ſia *Logiſtica*.

Le aſciſſe AP, A*p* &c. ſon i logaritmi delle Ordinate PM, *pm* &c.

Onde ſe AP $= x$, A*p* $= u$, PM $= y$, *pm* $= z$, ed i logaritmi di y e z ſien ly, lz, ſarà $x = ly$, $u = lz$; e per conſeguenza $x : u :: ly, lz$, cioè i denominatori delle ragioni AN : PM, e AN : *pm* ſon fra loro come le aſciſſe AP e A*p*.

Perciò ſi poſſon far infinite altre *Logaritmiche*, ſe ſi fa $x : u :: \frac{m}{m} ly : lz$.

E poichè le ſemiordinate *pm* decreſcono continuamente in ragione che AN continuamente creſce rapporto a *pm*, la Logaritmica continuamente più ſi avvicina all'aſſe AX. E ſe ſi ſuppone $pm = o$, la ragione di AN ſarà creſciuta all'infinito. Onde la Logaritmica non può toccar l'aſſe, che ad una diſtanza infinita, perciò AX è il ſuo Aſintoto.

Logaritmica Spirale.

933. Dividaſi il quarto di circolo in qualunque numero di parti uguali ai punti (fig. 108) N, *n*, *n* &c. e dai raggi CN, C*n*, C*n* &c., ſi tolgano delle parti continuamente proporzionali CM, C*m*, C*m* &c.; i punti M, *m*, *m* &c. formeranno la *Logaritmica Spirale*. Onde gli Archi AN. A*n* &c. ſon i logaritmi delle ordinate o de' raggi CM, C*m* &c.

Cicloide.

934. La *Cicloide*, o *Trocoide* (fig. 112) è una curva deſcritta dal movimento d' un punto A della circonferenza d'un circolo, mentre che il circolo fa una rivoluzione ſopra la retta AP. Lorchè una ruota di carrozza gira, un de' chiodi della ſua circonferenza deſcrive nell'aria una *cicloide*.

935. Dalla generazione di queſta curva ſi deducono facilmente queſte proprietà.

1.°

1.° La linea retta AP = alla circonferenza del circolo AB CD, ed AE = alla semicirconferenza dello ſteſſo circolo.

2.° In qualunque ſituazione ſia il circolo generatore, A*d* = all'arco *ad*; e ſiccome *ad* = *de*, ſarà *ad* = all'arco del circolo generatore dF.

3.° La lunghezza della *cicloids* intiera è ugual a quattro volte il diametro del circolo generatore.

4.° Lo ſpazio *Cicloidale* AFP è triplo dell'aja del circolo generatore.

5.° Una porzione qualunque FI della curva preſa dalla ſommità, è ſempre ugual al doppio della corda corriſpondente F*b* del circolo. E la tangente GI all'eſtremità I è ſempre paraliela alla ſteſſa corda F*b*.

Se il circolo gira, e nel tempo ſteſſo avanza in maniera, che il ſuo movimento rettilineo ſia più grande del ſuo movimento circolare; allora ſi avrà una *Cicloide allungata*, e la baſe AP è più grande della circonferenza del circolo generatore.

Al contrario, ſe il movimento rettilineo del circolo è minore del movimento circolare; ſi ha allora una *Cicloide accorciata*, e la ſua baſe è minore della circonferenza del circolo.

Lo ſpazio Cicloidale è lo ſpazio rinchiuſo dalla Cicloide e dalla ſua baſe. Queſto ſpazio è triplo del Circolo generatore. La dimoſtrazione n' è facile per mezzo del calcolo Integrale. Si può dunque ſaltarla, per ritornarvi dopo che ſi avrà appreſo quel calcolo.

Dimoſt. Sia *x* l'aſciſſa del circolo generatore preſa alla ſommità della Cicloide, *y* l'ordinata del ſemicircolo, e z quella della Cicloide. L'arco corriſpondente del circolo ſarà $\int \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$, *a* eſſendo il raggio del circolo, e per la proprietà della Cicloide ſi avrà $z = y + \int \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}} = \sqrt{2ax-x^2} + \int \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$. Moltipli-

can-

candoſi queſta quantità per dx, darà per l' elemento dell'aja della Cicloide $dx\sqrt{2ax-x^2} + dx\sqrt{2ax-xx}$, $\int \frac{adx}{\quad}$

di cui l' integrale è $\int dx\sqrt{2ax-x^2} + x\int \frac{adx}{\sqrt{2ax-xx}}$

$\int \frac{axdx}{\sqrt{2ax-x^2}}$; D' onde è facile conchiudere, che la metà dello ſpazio Cicloidale = 1.° al ſemicircolo, 2.° al diametro moltiplicato per la ſemicirconferenza, vale a dire al doppio del circolo intiero, da dove biſogna ſottrarre il prodotto del raggio per queſta ſemicirconferenza, cioè il circolo intiero; onde la metà dello ſpazio Cicloidale è ugual a tre volte il ſemicircolo. Dunque lo ſpazio Cicloidale = tre volte il circolo generatore.

Si può dimoſtrare ancora con un metodo ſempliciſſimo, che lo ſpazio racchiuſo tra il ſemicircolo e la ſemicicloide è ugual al circolo generatore. Si prendono due ordinate della Cicloide terminate al Circolo e ad ugual diſtanza dal centro; la ſomma di queſte ordinate ſarà ugual al ſemicircolo. Donde è facile dimoſtrare, dividendo lo ſpazio Cicloidale in piccoli trapezj, che l'aja di due trapezj preſi inſieme è ugual al prodotto della ſemicirconferenza per il raggio, cioè ugual al circolo.

Epicicloide.

936. L'*Epicicloide* è una curva generata dalla rivoluzione d'un punto della circonferenza d'un circolo, il quale ſi muove girando ſulla parte conveſſa o concava d'un altro circolo.

Se il circolo generatore ſi muove ſulla conveſſità della circonferenza, diceſi *epicicloide ſuperiore ed eſteriore*; ſe ſi muove ſulla concavità, l' epicicloide ſi chiama *inferiore o interna*. Vedi de l'Hopital *Infiniment*

nt petits. Accad. Royal des Scien. anno 1728 2.

37. Tutte queſte ed altre curve Traſcendenti non o equazione algebraica; e benchè per alcune ſiaſi a qualche equazione, ſi è però potuto accorgere, ſi ſon preſi degli archi circolari nel numero delle terminate, e con ciò non ſi fan certe equazioni al-aiche. Onde l'equazione delle Curve Traſcenden- Meccaniche non può eſſer eſpreſſa cho dall'equa- e differenziale tralle *dy* e le *dx*.

Sviluppata.

8. La *Sviluppata* è una curva che ſi dà da ſvi-are, e che ſviluppandoſi deſcrive un' altra curva. pponganſi (fig. 105 num. 2) un filo eſattamente o ſopra una curva AB CG; e ſuppongaſi il filo in G e per tutto altrove libero come in A. Se ſi over l'eſtremità A del filo da A verſo F, ſviluppolo, e procurando che la parte ſviluppata HD i ſempre nella ſua eſtremità H la curva AHG; o il filo ſarà divenuto intieramente dritto, e che ſarà più che una tangente FG al punto G della , è chiaro che l'eſtremità A nel ſuo moto da A avrà deſcritto la curva ADEF. La prima curva G ſi chiama la *Sviluppata*; ciaſcuna delle ſue nti BD, CE &c. compreſe tra eſſa e la curva F, diceſi *raggio della ſviluppata*, o *raggio oſcu-e della curva* ADEF ne' punti riſpettivi D, E e i circoli, de' quali gli oſculatori BD, CE ſon , diconſi *circoli oſculatori della curva* ADEF in E &c.; e finalmente la nuova curva riſultante ſviluppamento della prima curva cominciato da A ma la *curva ſviluppante* o *curva deſcritta dal-luppamento*.

ni curva può concepirſi come formata dallo ſvi-mento d'un'altra; e ſi può proporre di trovar la , dal cui ſviluppamento un'altra è formata, ch' ſteſſo che trovar il raggio della *ſviluppata* in tut-

ti

sizione e di grandezza, ma che resta sempre parallelo a se stesso) dicasi y.

Suppongasi di più un'equazione, che non contenga altre incognite che queste due quantità x, y, unite con quantità cognite, e che questa equazione esprima il rapporto della variabile AP o sia x. al valore di PM, o dell'y corrispondente.

Finalmente s' immagini, che all' estremità di ciascun valore possibile di x si abbia in effetto delineata la y corrispondente secondo è stato determinato da questa equazione. La linea retta o curva, che passerà per l' estremità di tutte le y così delineate; o per tutti i punti M, sarà generalmente nominata *Luogo Geometrico*, e *luogo* dell' equazione proposta in particolare.

943. I *Luoghi* sono di differenti ordini secondo il numero delle dimensioni, alle quali la quantità indeterminata s'inalza nell' equazione. Onde sarà un *luogo del primo ordine*, se l'equazione è $x = \frac{ay}{c}$; *luogo del secondo ordine*, se l' equazione è $y^2 = ax$, o $y_2 = a^2 - x_2$ &c.; *luogo del terzo ordine*, se $y^3 = a^2x$, o $y^3 = ax^2 - x^3$... &c.

944. Tutte l'equazioni, delle quali i *Luoghi* sono del primo ordine possono ridursi a qualcuna delle quattro formole seguenti.

1°. $y = \frac{bx}{a}$;

2°. $y = \frac{bx}{a} + c$;

3.° $y = \frac{bx}{a} - c$;

4.° $y = c - \frac{bx}{a}$

In

In queſte formole ſi ſuppone ſempre, che la quantità incognita y ſiaſi liberata dalle frazioni; che la frazione, che moltiplica l'altra incognita x, ſia ridotta a queſta eſpreſſione $\frac{b}{a}$; e che tutti gli altri termini ſien ridotti a queſto $+c$.

Il luogo della prima formola è ſubito determinato, poichè è evidente, che egli è una retta, che taglia l'aſſe nella ſua origine A, e che fa con lui un angolo tale che le due incognite x, y ſien ſempre fra loro come a a b.

Or ſupponendo queſto primo luogo cognito, biſognerà per trovar il calcolo della ſeconda formola $y = \frac{bx}{a} + c$, prender prima ſulla linea AP una parte $AB = a$ (fig. 115), e tirare $BE = b$, $AD = c$, parallele tutte a PM. Si tiri poſcia dallo ſteſſo lato AP e verſo E la linea AE d'una lunghezza indefinita, e la linea retta indefinita DM parallela ad AE. Sarà la linea DM il luogo dell'equazione, o la formola che ſi vuol coſtruire. Perchè ſe per il punto qualunque M di queſta linea ſi tira MP paralleſa ad AQ, i triangoli ABE, APF ſaran ſimili; onde ſi avrà $AB\ (a) : BE\ (b) :: AP\ (x) : PF = \frac{bx}{a}$, e per conſeguenza $PM\ (y) = PF\ \frac{(bx)}{(a)} + FM\ (c)$. Se ſi fa $c = o$, vale a dire, ſe i punti D, A cadono l'uno ſull'altro, e DM ſopra AF, la linea AF ſarà allora il luogo dell'equazione $y = \frac{bx}{a}$.

Per trovar il *luogo* della terza formola, biſognerà far in queſta maniera. Facciaſi $AB = a$ (fig. 116), e ſi tirino le rette $BE = b$, $AD = c$, parallele a PM, una da una parte di AP, l'altra dall'altra parte:

te: e per i punti A, E si tiri la retta AE, prolungata indefinitamente verso E, e per il punto D si tiri la linea DM parallela ad AE: La retta indefinita GM sarà il luogo cercato. Perchè si avrà sempre

$$PM\ (y) = PF\ \frac{(bx)}{(a)} - FM\ (c).$$

Finalmente per trovar il *luogo* della quarta formola, si faccia sopra AP (fig. 117.) $AB = a$, e $BE = b$, $AD = c$, l'una di qua di AP, l'altra di là; e per i punti A, E si tiri AE prolungata indefinitamente verso E, e per il punto D la linea DM parallela ad AE; Sarà DG il *luogo* cercato. Perchè se per uno de' suoi punti qualunque M si tira la linea MP parallela ad AQ, si avrà sempre $PM\ (y) = FM\ (c) - \frac{PF\ (bx)}{(a)}$.

945. Da ciò siegue, che i *luoghi del primo grado* non hanno che le sole linee rette, poichè tutte l' equazioni possibili del primo grado si riducono a qualcuna delle formole precedenti.

946. Tutti i *luoghi del secondo grado* non possono essere che Sezioni Coniche, cioè Parabola, Ellissi, o Circolo, che è una specie d'Ellissi, ed Iperbole, che in certi casi divien equilatera.

Se si suppone dunque data un' equazione indeterminata, di cui il *luogo* sia del secondo grado, e se si cerca descrivere la Sezione Conica che ne è il *luogo*; bisognerà prima di tutto considerar una Parabola, un' Ellissi, o un' Iperbole qualunque rapportandola a rette o a coordinate tali, che l'equazione, che n' esprimerà la natura, si trovi esser perciò la più composta e la più generale che sia possibile. Scoperte queste equazioni le più generali, o queste formole delle tre Sezioni Coniche e delle loro suddivisioni, ed esaminati i loro caratteri, sarà facile conchiudere a qual di loro si riferirà l'equazione proposta, vale a dire si troverà qual' è la Sezione Conica, che questa equazione avrà per

luogo. Per conseguire ciò, non si avrà dunque da far altro che paragonare tutti i termini dell' equazione proposta con quelli dell'equazione generale del *luogo*, al quale si avrà trovato che questa equazione si riferisca: ciò determinerà i coefficienti di questa equazione generale, ovvero le rette che devon esser date di proporzione e di grandezza per descriver il *luogo*; e determinati una volta questi coefficienti, o queste rette, si descriverà facilmente il luogo coll' ajuto de' Teoremi noti delle Sezioni Coniche.

947. Sieno, per esempio, AP (x), PM (y) (fig. 118.) due rette incognite variabili; e m, p, r, s sieno rette date. Sulla linea AP prendasi la porzione AB $=m$, e si tiri BE $=n$; AD $=r$; e per il punto A si tiri AE $=e$, e per il punto D la linea indefinita DG parallela ad AE: sopra DG si prenda DC $=s$; e prendendo CG per diametro, le ordinate parallele a PM, e la linea CH $=p$ per parametro, descrivasi la Parabola CM.

Questa parabola sarà il luogo della formola generale seguente.

$$y^2 = \frac{2n}{m}xy + \frac{n^2}{m^2}x^2 = 0$$
$$- 2ry + 2nr$$
$$\frac{}{m}x$$
$$- \frac{ep}{m}x$$
$$+ r^2$$
$$+ ps$$

Perchè se da uno de' suoi punti qualunque M si tira l'ordinata PM, i triangoli ABE, APF saran simili, e per conseguenza

$$AB\ (m) : AE\ (e) :: AP\ (x) : AF \text{ o } DG = \frac{en}{m}, \text{ e}$$
$$AB$$

AB (m) : BE (n) :: AP (x) PF $= \frac{n^2}{m}$, e per conseguenza GM o PM $-$ PF $-$ FG $= y - \frac{n^2}{m} - r$, e CG o DG $-$ DC $= \frac{en}{m} - s$. Ma per la natura della parabola $GM^2 = CG \times CH$. Quest' ultima equazione diverrà la stessa formola generale, se vi si sostituiscono invece delle rette che son impiegate, i loro valori sopra segnati.

Quest'equazione è la più generale che possa appartener alla parabola, poichè racchiude 1.° il quadrato di ciascuna delle incognite x, y. 2.° il prodotto di xy dell'una per l'altra. 3.° le incognite lineari x, y, ed un termine tutto costante. Un'equazione del secondo grado, in cui si trovano miste le indeterminate x, y, non può contenere un più gran numero di termini.

948. Per il punto fisso A si tiri la retta indefinita AQ (fig. 119) parallela a PM, prendasi AB $= m$, si tiri BE $= n$ parallela ad AP, e per i punti determinati A, E si tiri AE $= e$: sopra AP prendasi AD $= r$, si tiri l'indefinita DG parallela ad AE, e prendasi la porzione DC $= s$. Finalmente prendendo per diametro CG, e supponendo le ordinate parallele ad AP, e per parametro la linea CH $= p$, descrivasi una parabola CM. Questa parabola sarà il luogo di quest' seconda equazione o formola.

$$x^2 - \frac{2n}{m} yx + \frac{n^2}{m^2} y^2 = o$$
$$- 2rx - \frac{ep}{m} y$$
$$+ r^2$$
$$+ ps$$

Perchè se da un punto qualunque M si tira la retta MQ parallela ad AP, si avrà AB(m): AE(e) :: AQ o PM (y): AF o DG $= \frac{ey}{m}$, e AB (m) : BE (n) :: AQ (y): QF $= \frac{ny}{m}$, e per conseguenza Gm o QM $-$ QF $-$ FG $= x - \frac{ny}{m} - r$; e CG o DG $-$ DC $= \frac{ey}{m} - s$. E così per mezzo della proprietà della parabola, si troverà ancora la seconda dell' equazioni generali o delle formole precedenti. Nella stessa maniera si troveranno l' equazioni generali o le formole delle altre Sezioni Coniche.

949. Se ora si cerca di descrivere la parabola, che deve esser il *luogo* dell' equazione seguente, che si supporrà data $y^2 - 2ay - bx + c^2 = o$; siccome y^2 si trova qui senza frazione, come nella prima formola, sarà meglio paragonare la proposta colla prima formola che coll' altra.

E primieramente poichè il rettangolo xy non si trova nella proposta, o può supporsi moltiplicato per o, si conchiuderà che la frazione $\frac{2n}{m}$ debba esser $= o$, e per conseguenza sarà anche n, o BE $= o$; in maniera che i punti B, E devon essere coincidenti, e la retta AE deve cadere sopra AB, ed esserle uguale, vale a dire che $m = e$. Distruggendo dunque nelle formole tutti i termini affetti di $\frac{n}{m}$, o di n, e sostituendo per tutto m invece di e, si cambierà in $y^2 - 2ry - px + r^2 + ps = o$. E paragonando ancora i termini corrispondenti $-2ry$, e $-2ay$, $-px$, e $-bx$, finalmente $r^2 + ps$, e c^2, si avrà $r = a$, $p = b$, e sostituendo questi valori nell' ultima equazione di compara-

parazione, $a^2 + bs = c^2$, ovvero $s = \frac{c^2 - a^2}{b}$, che per conseguenza sarà una quantità negativa, se a è più grande di c, come si è quì supposta. Non servirebbe a niente paragonar i due primi termini, perchè essendo gli stessi dall' una e l'altra parte, cioè y^2, questa comparazione non potrebbe fare scoprir niente.

Or trovati così i valori di m, n, r, p, s, si costruirà il *luogo* cercato per i mezzi che han servito alla costruzione della formola, e nella maniera seguente.

Siccome BE $(n) = o$, ed i punti B, E (fig. 120.) coincidono, ovvero AE casca sopra AP, bisognerà per questa ragione tirare dal punto A la retta AD (r) parallela a PM $= a$, e la retta DG parallela ad AP, in cui si segnerà DC $(s) = \frac{a^2 - c^2}{b}$, la quale deve esser presa al di là dell' origine in un senso opposto a DG o AP, perchè la frazione $\frac{a^2 - c^2}{b}$ è negativa per suppositione. Riguardando poi DC come diametro, e prendendo le ordinate parallele a PM, e la retta CH $(p) = b$ per parametro, si descriverà una parabola; la quale sarà il luogo dell' equazione data, com'è facile a dimostrarsi.

950. Se il quadrato x^2 si fosse trovato senza frazione nella proposta, in tal caso sarebbe più naturale servirsi della seconda formola.

Del resto è chiaro, che per mezzo d' una divisione facilissima si può liberare dalle frazioni quel quadrato che si vorrà; e se si vedesse che la comparazione de' termini ne diveniss più semplice, bisognerebbe incominciare da questa divisione.

951. Ecco un' idea del metodo per costruir *i luoghi* dell' equazioni, lorchè devon esser Sezioni Coniche, cioè lorchè l' equazioni non passan il secondo grado;

poichè collo ſteſſo metodo ſi determinan i luoghi all' Eliſſi ed all'Iperbole.

952. Ma data un'equazione, invece di domandare, come finora ſi è fatto, di coſtruirne il *luogo*; ſi potrebbe domandar ancora di quale ſpecie debba eſſere la Sezione Conica che ne è il *luogo*; ſe è una Parabola, un' Eliſſi, un Circolo, un' Iperbole equilatera o non equilatera.

Per far queſto eſame, biſogna prima far paſſare da una parte tutti i termini dell'equazione, in maniera che reſti zero dall'altra parte. Ciò fatto poſſon preſentarſi due caſi differenti.

Primo caſo. Suppoſto che il rettangolo xy non ſi trovi nell'equazione; allora 1.° ſe non vi è che uno de' due quadrati y^2, o x^2, il *luogo* ſarà una parabola. 2.° Se vi ſi trovan tutti e due i quadrati in una volta, e collo ſteſſo ſegno, il *luogo* ſarà un' Eliſſi; ed in particolar un Circolo, lorchè niuno de' due quadrati avrà coefficiente, ovvero ſe aveſſero gli ſteſſi coefficienti, e di più l'angolo delle coordinate foſſe retto. 3.° Se i due quadrati ſi trovano nell'equazione, e con ſegni differenti, il *luogo* ſarà un' Iperbole, la quale diverrà equilatera nelle ſteſſe ſuppoſizioni che fanno dell'Eliſſi un circolo.

Secondo caſo. Quando il rettangolo xy ſi trova nell'equazione, allora 1.° Se non ſi trova alcuno de' due quadrati, o ſe ne trova un ſolo, e tutti due con ſegni differenti, o finalmente tutti due cogli ſteſſi ſegni, e ſe il quadrato del coefficiente che moltiplica xy è maggiore del quadruplo del rettangolo de' coefficienti di xx, e di yy; in tutte queſte ſuppoſizioni il *luogo* ſarà un'Iperbole. 2.° Se i due quadrati vi ſi trovan ſempre, e collo ſteſſo ſegno, e ſe il quadrato del coefficiente xy è più piccolo del quadruplo del rettangolo de' coefficienti di xx, yy; il *luogo* ſarà allora un' Eliſſi. 3.° Finalmente ſe nella ſteſſa ſuppoſizione queſto quadrato ed il quadruplo del rettangolo precedente ſon uguali fra loro, il *luogo* ſarà una Parabola.

CA-

CAPITOLO V.

Del Calcolo Infinitesimale.

953. OGni grandezza può considerarsi come prodotta o ridotta ad un certo stato per mezzo d' un accrescimento o decrescimento continuo. Questo accrescimento o decrescimento può immaginarsi cagionato da una quantità, che agisce per gradi uguali ed infinitamente piccoli, determinati però da una stessa legge. Questi gradi *infinitamente piccoli* si chiaman le *Differenze*, o le *Differenziali* della grandezza.

Quel calcolo, in cui si fanno entrar l'espressioni di questi gradi *infinitamente piccoli*, si chiama Calcolo *Infinitesimale*.

954. Per comprender l' essenza di questo Calcolo, convien ben ricordarsi di quel che si è detto dell' *Infinito* (316). 1°. L'idea che si ha dell' *Infinito*, è un' idea astratta. Si concepisce prima un' estensione *finita*, indi se ne tolgon i *limiti*, e così si concepisce *infinita*. 2°. L' *infinito* è il *limite del finito*; cioè il termine, cui il finito tende sempre senza giammai arrivarvi, ma vi si accosta sempre vieppiù, benchè giammai vi arrivi. Quando si dice, per esempio, che una *curva è un poligono d' infiniti lati*, s' intende dire, che questa curva è il *limite* de' poligoni che si posson iscriverle e circoscriverle, cioè che questi poligoni quanti più lati avranno, più si accosteranno ad esser uguali alla curva, da cui si può supporre che differiscano quanto poco si vuole, aumentando a volontà il numero de' loro lati (506). Onde queste comuni espressioni poco esatte dell' *Infinito*, devon riguardarsi come maniere abbreviate d' esprimersi, inventate per enunciar una verità, di cui lo sviluppamento e l' enunciato esatto avrebbero richiesto molte più parole.

955. Così per quantità *infinitamente piccole* non si devon già intendere quantità d' una picciolezza *infini-*

za reale ed esistente, ma d'una tal picciolezza che sia sempre minore di qualunque quantità assegnabile.

956. Il *Calcolo Infinitesimale* si divide in *Differenziale* ed in *Integrale*. Il calcolo *Differenziale* (chiamato da Nevvton e dagl' Inglesi *Metodo delle Flussioni*, perchè han considerato gli aumenti momentanei della quantità come generati dal *flusso* o sia scorrimento del punto per formar la linea, del *flusso* della linea per la superficie, del *flusso* della superficie per il solido) consiste a trovar una quantità infinitamente piccola, la quale presa un numero infinito di volte, sia uguale ad una quantità data. Il *Calcolo Integrale* al contrario consiste a trovar la quantità, alla qual appartiene la data differenza infinitamente piccola. In quello si conosce la somma, e si cerca la differenza infinitamente piccola; in questo si conosce la differenza infinitamente piccola, e si cerca la somma.

957. Per ben comprendere la *Differenziale*, o sia una *quantità infinitamente piccola*, si consideri la Curva C A B, in cui si voglia trovar la tangente al punto (fig. 121.) A. Si prendan ad arbitrio su questa curva due punti A, B, per i quali si tiri una retta AB prolungata indefinitamente verso Z ed X, la quale taglia la curva, e perciò la XZ si chiama secante. S' immagini poscia una linea fissa CE posta a volontà nel piano su cui è delineata la curva, e per i due punti A, B si tirino le ordinate AD, BE perpendicolari alla fissa CE, ch'è l' asse della curva. E' evidente che la posizione della secante è determinata dalla distanza DE delle due ordinate e dalla loro differenza BO; in maniera che se si conoscesse questa distanza e questa differenza, o anche il rapporto della distanza delle ordinate alla loro differenza, si avrebbe la posizione della secante. S' immagini ora, che de' due punti A, B supposti sulla curva, ve ne sia uno, per esempio, B, che si avvicini continuamente all' altro A, e che per quest'altro punto A supposto fisso si abbia tirata una tangente AP alla curva: E' facile vedere, che la secante AB tirata per questi due

punti

punti A , B, de' quali uno è ſuppoſto accoſtarſi ſempre più all' altro, ſi accoſterà continuamente alla tangente, e finalmente diverrà la tangente ſteſsa , lorchè i due punti ſi faran confuſi in un ſolo . La tangente è dunque il *limite* delle ſecanti , il termine cui ellə ſi accoſtano ſempre più , ſenza pertanto giammai arrivarvi finchè ſono ſecanti , ma cui elle poſson accoſtarvi quanto vicino ſi vorrà . Già ſi è viſto , che la poſizione della ſecante è determinata dal rapporto della differenza BO delle ordinate alla loro diſtanza DE. Dunque ſe ſi cerca il limite di queſto rapporto , valə a dire il valore con cui queſto rapporto ſi accoſta ſempre viepiù a miſura che una dell'ordinate ſi accoſta all'altra, queſto *limite* darà la poſizione della tangente, poichè la tangente è il limite delle ſecanti.

958. Il *Calcolo Differenziale dunque conſiſte a trovar il limite del rapporto tralla differenza finita di due quantità e la differenza finita di due altre quantità, che hanno colle due prime un' analogia d' una legge nota.*

E' evidente , che quanto più ciaſcuna di queſte differenze è piccola, più il loro rapporto ſi approſſima al termine che ſi cerca. E' inoltre evidente , che finchè queſte differenze non ſon aſsolutamente nulle , il rapporto non è eſattamente ugual a queſto limite; e che quando ſon nulle , non vi è più vero rapporto , perchè non ſi dà rapporto fra due coſe che non eſiſton punto. Ma il *limite* del rapporto, che queſte differenze avean tra loro quand' eran ancora qualche coſa , è un limite tuttavia reale , ed è il valore di queſto limite, che conduce a determinare (come ſi è detto) il valore della tangente.

Se, per eſempio, $A = 2b + b^2$, è chiaro, 1.° che il rapporto di A a b ſarà ſempre maggiore del numero 2, finchè A e b avran qualche valore . 2.° che il rapporto di A a b ſi approſſimerà più ad eſſer ugal a 2, quanto più piccola ſarà b ; e che queſto rapporto potrà approſſimarſi a 2 quanto più ſi vorrà , prendendo b ſempre più piccola. Donde ſiegue, che il numero

ro 2 è il limite del rapporto di queste quantità; e lorchè una di queste due quantità divien nulla, divien nulla anche l'altra, ed allora non vi è fra loro alcun rapporto; ma finchè elle son qualche cosa, 2 è il limite del loro rapporto.

959. Dicesi *costante* ogni quantità, che si considera come giunta ad un stato fisso.

Variabile chiamasi quella quantità che si riguarda come attualmente suscettibile d'accrescimento o di diminuzione. In un dato circolo, il diametro è una *costante*, una corda è una *variabile*. Le *costanti* si esprimon ordinariamente colle prime lettere dell'alfabeto, e le *variabili* coll'ultime.

960. La differenziale d'una variabile si esprime per mezzo della lettera *d*; onde *adx* significa il prodotto della *costante* a per l'accrescimento infinitamente piccolo della *variabile x*, cosichè *d* non esprime alcuna funzione della quantità, ma serve soltanto di *caratteristica* per denotare un infinitamente piccolo.

961. Quanto si è detto (316) degl'infiniti di differenti ordini, si applica ugualmente ai differenti ordini d'*infinitamente piccoli*. Onde lorchè si dice che una *quantità è infinitamente piccola del secondo ordine*, cioè infinitamente piccola rapporto ad una quantità che è già infinitamente piccola, ciò significa, che il rapporto della prima di queste quantità alla seconda è sempre tanto più piccolo, quanto più piccola è supposta questa seconda quantità; e che il rapporto può supporsi quanto piccolo si vuole, supponendo perciò la seconda quantità abbastanza piccola.

Così una quantità infinitamente piccola del 3.° ordine è quella, di cui il prodotto per una quantità finita è tanto più piccolo rapporto al quadrato d'un'altra quantità, quanto quest'ultima è supposta più piccola; in maniera che questo rapporto può supporsi quanto piccolo si vuole.

962. Da questi principj è facile dedurre l'utilità del Calcolo Differenziale per iscoprire la natura e le proprietà delle curve. Perchè consistendo il principio di questo

questo calcolo a riguardar le curve come il *limite* de' poligoni, è chiaro, che le quantità finite, il rapporto delle quali determinerebbe le proprietà di questi poligoni, divengon nulle nelle curve; e che invece del rapporto di queste quantità, è il *limite* del loro rapporto che vien determinato dal *calcolo differenziale*, a fin di trovar con questo mezzo le proprietà delle curve, considerate come *limite* de' poligoni.

963. Quindi si vede, che il *Calcolo differenziale* non dà (per così dire) le proprietà d' una curva che a *ciascun punto*, poichè si ristringe a dare a ciascun punto il *limite* del rapporto di certe quantità, che svaniscono nella curva, e che son finite nel poligono.

694 Lorchè nel *Calcolo Infinitesimale* si fa entrar l' espressione dell' accrescimento o del decrescimento infinitamente piccolo d' una o di più variabili, il calcolo si chiama *Differenziale*, che è il primo ramo del *Calcolo Infinitesimale*. Onde *differenziare* un' equazione o una formola, è cercare l' espressione Algebraica delle quantità che forman il grado infinitamente piccolo d' accrescimento o di decrescimento per ciascuna delle variabili, che sono nell' equazione o nella formola proposta.

Il *Calcolo Integrale*, ch' è l' altro ramo del *Calcolo Infinitesimale*, dà la maniera di rimontare (lorchè si può) dal limite del rapporto, che è fralle *differenze* delle quantità finite, al rapporto stesso di queste quantità. Egli assegna quest' ultimo rapporto, e conduce (per quanto è possibile) alla cognizione della curva in quell' estensione finita, che si giudica a proposito, dando il mezzo d' iscrivere in questa curva qual poligono si vorrà, ovvero di conoscer la proprietà di questo poligono e la porzione de' suoi lati.

Onde Integrare un' equazione o una formola differenziale, è lo stesso che ricercare quale ha dovuto essere l' equazione o la formola prima d' essere stata differenziata; cioè cercar il risultato di tutti gli accrescimenti, de' quali l' espressione differenziata non conteneva che un grado infinitamente piccolo per ciascuna variabile.

CA-

CAPITOLO VI.

Del Calcolo Differenziale.

Regole di Differenziare.

965. LA differenza di ax è adx.

Dim. E' chiaro, che DF essendo l' accrescimento (fig. 122.) del lato variabile AD, mentre che il lato BD è costante, il parallelogrammo ED = aXdx è l'accrescimento del parallelogrammo CD = ax.

966. *Corol.* La differenziale di ax + by — cx = adx + bdy — cdx; quella di ab + b^2 — cy = — cdy; quella di a^2 — bcz = — bcdz. Così d (x + y + z) = dx + dy + dz.

Onde I. Regola: *la differenza della somma di molte quantità è ugual alla somma delle loro differenze.*

967. La differenza di xy = xdy + ydx.

Dim. Per gli accrescimenti dx, dy, il rettangolo (fig. 123) CD è stato aumentato di tre rettangoli infinitamente piccoli xdy, ydx, dxdy. Quest' ultimo deve esser negletto, perchè è un infinitamente piccolo del secondo ordine (320); dunque l' accrescimento infinitamente piccolo del rettangolo xy = xdy + ydx. Onde

II. Regola: *la differenza è un prodotto composto di due quantità variabili, sarà sempre la prima quantità moltiplicata per la differenza della seconda, + la seconda quantità moltiplicata per la differenza della prima.*

968. Corol. 1.° La differenza del quadrato xx = xdx + xdx. 2xdx. E quella di axx = axdx + axdx = 2axdx.

969. Coroll. II. La differenza di xyz = yzdx + xzdy + xydz. Onde

III. Regola: *la differenza d' un prodotto composto di tre quantità variabili, sarà sempre il prodotto delle quantità poste due a due per la differenza della terza.*

970.

970. Coroll. III. La differenza del cubo $xxx = xxdx + xxdx + xxdx = 3xxdx = 3x^{3-1}dx$. Quella di $x^4 = 4x^3dx$. In generale, la differenza di $x^m = mx^{m-1}dx$.

971. La differenza di $\sqrt[n]{x^m} = \frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}dx$

Dim. $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ (148): La differenza di $x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx = \frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}dx$; dunque &c.

972. La differenza di $\frac{1}{x^m} = -mx^{-m-1}dx$.

Dim. $\frac{1}{x^m} = x^{-m}$ (155); ma la differenza di $x^{-m} = -mx^{-m-1}dx$ (971); dunque &c.

973. La differenza di $\sqrt{xy+yy} = \frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$.

Dim. Sia $\sqrt{xy+yy} = u$, sarà $xy+yy = uu$, e $ydx+xdy+2ydy = 2udu$. Dunque $du = \frac{ydx+xdy+2ydy}{2u}$; ma $2u = 2\sqrt{xy+yy}$, dunque $du = ydx+xdy+2ydy$; ma du è differenza di u o sia $\frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+y^2}}$

di

di $\sqrt{xv+xy}$, dunque &c.

974. La differenza di $\frac{1}{\sqrt[n]{x^{m-n}}} - \frac{m}{n\sqrt[m-n]{x}}$.

Dim. $\frac{1}{\sqrt[n]{x^{m-n}}} = \sqrt[n-m]{x}$ (155) $= x^{\frac{n-m}{n}}$ (148) $= -\frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}$.

dx (971) $= -\frac{m}{n}x^{\frac{-m-n}{n}}dx$. Mà $x^{\frac{-m-n}{n}} = \frac{1}{x^{\frac{m+n}{n}}}$ (155) $= \frac{1}{\sqrt[n]{x^{m+n}}}$ (148).

Dunque $-\frac{m}{n}x^{\frac{-m-n}{n}}dx = -\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}} \times \frac{1}{\sqrt[n]{x^{m+n}}}dx = -\frac{m\,dx}{n\sqrt[n]{x^{m+n}}}$.

975. $d\frac{(ax^{m+1})}{(m+1)} = ax^m\,dx$.

Dim. $d\frac{(ax^{m+1})}{(m+1)} = \frac{(m+1)ax^{m+1-1}dx}{m+1} = \frac{(m+1)ax^m\,dx}{m+1} = ax^m\,dx$; dunque &c.

976. $d\frac{(x)}{(y)} = \frac{ydx-xdy}{y^2}$.

Dim.

Dim. Sia $\frac{x}{y} = t$.

$$x = ty$$
$$dx = ydt + tdy$$
$$ydt = dx - tdy$$
$$dt = \frac{dx - tdy}{y}$$
$$dt = \frac{dx}{y} - td$$
$$dt = \frac{dx}{y} - \frac{xd}{y}$$
$$dt = \frac{ydx}{y^2} - \frac{xdy}{y^2}$$
$$dt = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

977. Corol. I. IV. Regola. *La differenza d'una frazione è ugual al prodotto della differenza del numeratore per il denominatore, — al prodotto della differenza del denominatore per il numeratore, il tutto diviso per il quadrato del denominatore.*

978. Corol. II. $d\frac{(y)}{(a)} = \frac{dy}{a}$. Perchè il denominatore a non avendo differenza, siegue che $d\frac{(y)}{(a)} = \frac{ady}{a^2} = \frac{dy}{a}$.

979. Corol. III. $d\frac{(a)}{(x)} = -\frac{adx}{x^2}$.

980.

980. Corol. IV. $d\frac{(ay)}{(x)} = \frac{axdy - aydx}{xx}$.

981. Fin quì delle *differenze prime*, cioè degl' infinitamente piccoli del primo ordine. Siccome il carattere d'una differenziale è la lettera *d*, così quello della differenziale di dx è ddx: e la differenziale di ddx è dddx, ovvero d^3x, d^ix &c., o anche $\dddot{x}$, $\ddot{x}$ &c. in vece di ddx, d^2x &c.

La differenziale d'una quantità finita, come dx si chiama *differenziale del primo grado* o *del primo ordine*, o anche *differenza prima*.

La parte poi infinitamente piccola d' una quantità differenziale del primo grado, come ddx, dxdx &c. dicesi *differenzio-differenziale*, o *differenza del secondo grado*, o anche *differenza seconda*.

Differenziale del terzo grado, o *del terzo ordine*, ovvero *differenza terza*, è la parte infinitamente piccola d' una quantità differenziale del secondo grado.

Delle Differenze Seconde.

982. La differenza seconda di *ax*, o sia la differenza di $adx = addx$.

Dim. La differenza seconda di *ax* è *ax* moltiplicato per il quadrato di *d*, dunque la differenza seconda di $ax = addx$.

983. La differenza seconda di x^m, o la differenza di $mx^{m-1}dx = mm - mx^{m-1}dx + mx^{m-2}dx^2 + mx^{m-1}ddx$.

Dim. Sia $x^{m-1} = y$, e $dx = z$. Convien osservare, che il quadrato di *dx* non è nè *ddxx*, nè *dxdx*, ma dx^2, perchè dx è una quantità semplice, e non il prodotto di *d* per *x*, poichè *d* è un semplice segno. Ciò posto, si ragioni così.

1.° Poi-

1.° Poichè $x^{m-1} = y$, sarà $m x^{m-1} dx = dy$.

2.° Essendo $dx = z$, e $x^{m-1} = y$, sarà $mx^{m-1} dx = myz$.

3.° La differenza di $myz = mzdy + mydz$.

4.° Sostituiscasi a z il suo valore dx, ed a dy il suo valore $m - 1 x^{m-2} dx$, e a y il suo valore x^{m-1}; si avrà $mzdy + mydz = m \times dx \times (m-1) x^{m-2} dx + m \times x^{m-2} \times ddx$.

5.° $m \times dx \times (m-1) x^{m-2} dx = (mm - m) x^{m-2} dx^2$, perchè m coefficiente di dx deve moltiplicare $m-1$ coefficiente di $x^{m-2} dx$; e dx che ha m per coefficiente, deve moltiplicare dx, di cui il coefficiente è $m - 1$.

6.° $m x^{m-1} \times ddx = mx^{m-1} ddx$; dunque $mzdy + mydz = (mm - m) x^{m-2} dx^2 + mx^{m-1} ddx$.

7.° La differenza di myz è la stessa che quella di $mx^{m-1} dx$ (2.°), dunque la differenza di $mx^{m-1} dx = (mm - m) x^{m-1} dx^2 + mx^{m-1} ddx$.

984. Corol. I. La differenza seconda di $x^2 = 2dx^2 + 2xddx$; perchè se $m = 2$, la formola precedente diviene $(4-2) x^{2-2} dx^2 + 2x^{2-1} ddx = 2x^0 dx^2 + 2xddx = 2dx^2 + 2xddx$.

985. Corol. II. La differenza seconda di $x^3 = 6xdx^2 + 3x^2 ddx$. Perchè se $m = 3$, la predetta formola diviene $(9-3) x^{3-2} dx^2 + 3x^{3-1} ddx = 6xdx^2 + 3x^2 ddx$.

986. La differenza seconda di xy, o la differenza di $ydx + xdy = yddx + xddx + 2dxdx$.

Dim. La differenza di $ydx = dxdy + yddx$ (969). La differenza di $xdy = dydx + xddy$ (969). Dunque la differenza di $ydx + xdy = dxdy + yddx + dxdy + xddy = yddx + xddy + 2dxdy$.

987. La differenza seconda di $\frac{a}{y}$, o la differenza di

$$\frac{ady}{y^2} = \frac{-aydy + 2ady^2}{y^3}.$$

Dim. La differenza del numeratore $-ady = -addy$, e quella del denominatore $y^2 = 2ydy$. Poichè (977) la differenza di una frazione è composta della differenza del numeratore moltiplicata per il denominatore, — la differenza del denominatore moltiplicata per il numeratore, il tutto diviso per il quadrato del denominatore; sarà dunque la differenza di $\frac{-ady}{yy} =$

$$\frac{yy \times -addy - ady \times 2ydy}{2ady^2} = \frac{-ayyddy + 2aydy^2}{y^4} = \frac{-ayddy + 2ady^2}{y^3}.$$

988. La differenza già differenziata $\frac{ydy}{dx}$, prendendo dx per una quantità costante ed invariabile, è $\frac{dyy + yddy}{dx}$.

Dim. La differenza di $ydy = dy \times dy = dy^2 + yddy$. Dunque (977) la differenza di $\frac{ydy}{dx} = \frac{dx \times dy^2 + dx \times yddy}{dx \times dx} = \frac{dy^2 + yddy}{dx}$.

Diffe-

Differenziando una quantità già differenziata, accade quasi sempre che la differenza prima d' una delle variabili sia diventata una quantità costante, o almeno che debba prendersi come costante.

Uso del Calcolo Differenziale per trovar le Tangenti, Sottangenti, Normali, e Sunnormali.

989. E' evidente, che per tirar una tangente in un punto dato sopra una curva, bisogna determinare sopra l' asse, sul diametro, o su qualche linea data di posizione, un punto per dove la tangente deve passare, affin d'avere due punti che ne determinino la posizione; ovvero bisogna trovar anche un punto per cui deve passare la normale al punto dato sulla curva, per poter dal dato punto inalzarvi una perpendicolare.

Sia SR la tangente che passa per la solidità dell'asse (fig. 129 e 130) o del diametro, e sia MP l'ordinata al punto dato M, e *pm* sia un altra ordinata infinitamente vicina terminata alla tangente TM. Per M si tiri *Rr* parallela al diametro o all'asse, e dallo stesso punto M si tiri MN perpendicolare alla tangente o alla curva. Allora poichè il triangolo *infinitesimale* *rMm* rettangolo in *r*, è simile al triangolo (fig. 130) MRB rettangolo in R; al triangolo TSB rettangolo in S; al triangolo TPM rettangolo in P; ed al triangolo MPN rettangolo in P: Come altresì il triangolo (fig. 129) *Mrm* essendo simile al triangolo MRB a causa degli angoli in M opposti al vertice, e delle parallele *pm*, SR che danno gli angoli alterni *r* ed R uguali, onde i triangoli MRB e BST son equiangoli, e lo sono anche i triangoli BST e MPT a causa dell' angolo comune T e delle parallele SR e PM: premesse tutte queste cose, si avranno le formole seguenti ....

990. $PT = \frac{ydx}{dy}$. Perchè *rm* : *rM* :: MP : PT.

991. $ST = \frac{ydx - xdy}{dy}$. Perchè $ST = PT - PS$, e $PS = x = \frac{xdy}{dy}$.

992. $SB = \frac{ydx - xdy}{dx}$. Perchè $PT : TS :: PM : SB$; ovvero $Mr : mr :: TS : SB$.

Queste non convengono che alla figura 130.

993. $Mm = \sqrt{dy^2 + dx^2}$, e se si fa $Mm = ds$, sarà $ds = \sqrt{dy^2 + dx^2}$.

994. $PN = \frac{ydy}{dx}$. Perchè $rm : Mr :: PM : PN$.

995. $TM = \frac{y\sqrt{dy^2+dx^2}}{dy} = \frac{yds}{dy}$; perchè $rm : Mm :: PM : TM$.

996. $TB = \frac{\sqrt{(dy^2+dx^2)}(ydx - xdy)}{dxdy}$ perchè $rm : Mm :: SB : TB$.

997. $MB = \frac{x\sqrt{(dy^2+dx^2)}}{dx}$; perchè $Mr : Mm :: SP : MB$.

998. $MN = \frac{y\sqrt{(dy^2+dx^2)}}{dx}$; perchè $Mr : Mm :: PM : MN$.

999. $TN = \frac{ydx}{dy} + \frac{ydy}{dx}$; perchè $TN = TP + PN$.

1000. Per applicare queste formole generali alle Curve, bisogna differenziarne l'equazione, e combinarne li dx e li dy, in maniera che ne risulti un' equazione

ne, di cui un membro contenga qualcuna delle formole precedenti, e l'altro racchiuda ſolamente quantità finite.

Sia, per eſempio, l'equazione alla parabola $y^2 = x$, facendo il parametro $= 1$. La differenziale $2ydy = dy$; dunque $2y = \frac{dx}{dy}$; dunque $2y^2 = \frac{ydx}{dy}$: ma $y^2 = x$, dunque $dx = \frac{ydx}{dy}$. Queſto ſecondo membro (990) è il valore di PT; dunque nella parabola $PT = 2x$, come ſi è veduto (835).

1001. Sia ancora l'equazione all'Eliſſi (819) $aayy = 2abbx - bbxx$; dunque differenziando ſi ha $2aaydy = 2abbdx - 2bbxdx$, e dividendo per 2, e moltiplicando per y, ſi avrà $aay^2dy = abbydx - bbxydx$; ovvero $\frac{aay^2dy}{abb-bbx} = ydx$; e dividendo tutto per dy, ſi ha $\frac{aayy}{abb-bbx} = \frac{ydx}{dy}$.

Ma $aayy = 2abbx - bbxx$, dunque $\frac{2abbx-bbxx}{abb-bbx} = \frac{dx}{dy}$, ovvero $\frac{2ax-xx}{a-x} = \frac{ydx}{dy} = PT$ (990), e come 834.

Or $\frac{ydx}{dy} = x$, dunque $\frac{2ax-xx}{a-x} - x = \frac{ydx}{dy} - \frac{xdy}{dy}$, dunque $\frac{2ax-x^2-ax+x^2}{a-x} = \frac{ydx-xdy}{dy}$, e riducendo ſarà $\frac{ax}{a-x} = \frac{ydx-xdy}{dy} = ST$ (991), e come (837).

Lo ſteſſo è per i valori analitici d'altre linee appartenenti al punto del contatto in tutte le Sezioni Coniche, ed in altre Curve.

Per trovar i raggi della Curvatura delle Curve.

1002. Sia una curva qualunque SMK, ed il ſuo aſſe (fig. 131) SN. *Qual è la ſua curvatura al punto* M, *o nell'arco infinitesimo* M*m*?

Sol. Per i tre punti che formano l'arco M*m* s'immagini che paſſi un circolo, di cui il centro ſia C. Sarà MC o *m*C il raggio della curvatura richieſta.

Dim. Si tirino le ordinate MP, *mp*; la normale del punto M ſarà MN, e la ſunnormale PN. Ciò poſto, M*m*, o $ds = \sqrt{dy^2 + dx^2}$ (993), MN $= \frac{yds}{ydx}$ (998, e 993), PN $= \frac{ydy}{dx}$ (994). Dunque SN $= x + \frac{ydy}{dx}$. Or N*n* è una differenziale di SN, convien dunque differenziare $x + \frac{ydy}{dx}$, e facendo dx coſtante ſi ha N*n* $= dx + \frac{dy^2 + yddy}{dx} = \frac{dx^2 + dy^2 + yddy}{dx} = \frac{ds + ydd}{dx}$. Si tiri MB parallela all'aſſe, i triangoli rettangoli ſimili M*m*B, N*tn* danno M*m*: MB o P*p*:: N*n*: N*t*, ovvero $ds : dx :: \frac{ds^2 + yddy}{dx} :$ N*t* $= ds + \frac{yddy}{ds}$,

Dal punto N ſi tiri a CM la parallela NI, che dà

N*t*

$Nt = Im$, e per conseguenza $IM = Mm - Im = ds - ds\frac{yddy}{ds} = -\frac{yddy}{ds}$.

Finalmente i triangoli rettangoli simili IMN, MmC, danno $IM : MN :: Mm : MC$, o $-\frac{yddy}{ds} : \frac{yds}{dx} :: ds : MC = \frac{ds^2}{-dxddy} = \frac{ds^2ds}{-dxddy}$. E mettendo $dy^2 + dx^2$ in luogo di ds, si ha la formola generale del raggio della curvatura per tutte le curve rapportate ad un asse, $MC = \frac{(dy^2 + dx^2)\sqrt{dy^2 + dx^2}}{-dxddy}$.

1003. Per applicar questa formola alle curve date, bisogna vedere per mezzo dell'equazione della curva, i valori di dx, dx^2, dy^2, $-ddy$, in maniera che nell'espressione di ciascuno di questi valori, non vi entri che y e delle costanti. E così sostituendo, la formola generale si troverà ridotta a quantità finite.

Nella parabola, per esempio, ove $y^2 = px$, si ha $2ydy = pdx$, dunque $dx = \frac{2ydy}{p}$, e $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{p^2}$.

Differenziando $dx = \frac{2ydy}{p}$, ove dx deve esser una costante, poichè si è preso così nel calcolo della formola generale, si ha $o = \frac{2dy^2 + 2yddy}{p}$; E perchè il primo membro di questa equazione è o, si toglie la frazione e diviene $o = 2dy^2 + 2yddy$; dunque $-2yddy = 2dy^2$, e $-ddy = \frac{dy^2}{y}$.

Sostituendo dunque, si ha il denominatore della for-

formola generale del (1002) che è $-dxady = \frac{2ydy^2}{py} = \frac{2dy^2}{p}$.

Il numeratore poi della predetta formola generale $dx^2 + dy^2 = \frac{4yydy^2}{p^2} + dy^2 = \frac{4y^2dy^2 + p^2dy^2}{p^2} = \frac{dy^2}{p^2} \times 4y^2 + p^2$.

Finalmente l'altro resto del denominatore della formola generale $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{dy}{p}\sqrt{(4y^2 + p^2)}$.

Dunque la predetta formola generale diverrà $\frac{dy^2}{p^2}(4y^2 + p^2) \frac{dy}{p} \sqrt{4y^2 + p^2}$, il tutto diviso per $\frac{2dy^2}{p}$, ovvero moltiplicato per $\frac{p}{2dy^2}$: ma $\frac{dy^2}{p^2} \times \frac{dy}{p} \times \frac{p}{2dy^2} = \frac{dy^2p}{2p^2dy^2} = \frac{dy^2}{2p^2dy^2} = \frac{1}{2p^2}$; dunque la predetta formola sarà convertita in quest'altra $\frac{(4y^2 + p^2)\sqrt{(4y^2 + p^2)}}{2p^2}$.

Per trovar i Massimi, ed i Minimi.

1004. Lorchè la legge, secondo la quale una quantità è prodotta, esige, che questa quantità, o una funzione di questa quantità cresca fin ad un certo punto, e poi decresca; si può domandare qual' è stato il suo valore, lorchè ella era la più grande. Ovvero se la quantità deve scemare fin ad un certo punto, e poi andare crescendo; si può chiedere qual è stato il suo valor, lorch' ella era la più piccola, e quando o

in

in qual luogo ella vi si è trovata. Questo è quel che si chiama cercar il *Massimo*, o il *Minimo*; ed il metodo, che vi s'impiega, dicesi il metodo de' *Massimi* e de' *Minimi*.

1005. E' evidente, che nel punto, ove la quantità è divenuta la più grande, il suo accrescimento è divenuto nullo. Donde segue, che avendo differenziata l'equazione, ch'esprime la quantità di cui si tratta, bisogna far = o la differenziale della variabile che và crescendo e poi scemando, o scemando e poi crescendo: con questo mezzo l'equazione differenziata potendo esser ridotta a termini finiti, esprimerà il *Massimo* o il *Minimo* che si cerca.

1006. Probl. *Trovar la più grande ordinata al grand'asse d'un' Ellissi.*

Sol. La più grande ordinata al grand'asse dell'Ellissi è la metà del piccolo asse.

Dim. 1.° Il grand'asse d'un'Ellissi qualunque sia = 2a; il piccolo asse = 2b; un' ordinata qualunque = y; un' ascissa corrispondente = x.

2.° Nel punto ove l'ordinata y è divenuta la più grande, il suo accrescimento è divenuto nullo, o sia o, e la sua differenziale dy è in quel punto = o.

3.° L'equazione all'Ellissi è (819) $aayy = 2abbx = bbxx$, la quale differenziata diviene $2aaydy = 2abbdx - 2bbxdx$.

4.° Siccome l'ordinata che si cerca, si suppone giunta al suo *Massimo*, avrà in quel punto la sua differenziale $dy = o$. Dunque $2aaydy = 2aay + dy = 2aay \times o = o$. Dunque l'equazione (3°) diviene $2abbdx - 2bbxdx = o$; dunque $2abbdx = 2bbxdx$; dunque $a = x$. Dunque lorchè $x = a$, l'ordinata dell'Ellissi è giunta al suo *Massimo*.

Ma *a* è la metà del grand'asse d'un' Ellissi qualunque: ed *x* un'ascissa qualunque; dunque quando l'ordinata ha per ascissa corrispondente la metà del grand'asse, allora ella è giunta al suo *Massimo*. Ma la metà del piccolo asse è un' ordinata, che ha per ascissa corrispondente la metà del grand'asse; dunque la metà

del

del piccolo asse è la più grand'ordinata al grand' asse d'una Elissi.

1007. Per aver un'idea ben chiara di questo importante metodo de' *Massimi* e de' *Minimi*, supponga si una Curva geometrica, in cui tutti i valori possibili d'una variabile x camminino secondo questa legge, $0,1125x^4 - 0,725x^3 + 0,0735x^2 + 0,875x$. Convien prima supporre che questa formola sia il primo membro dell'equazione d'una curva geometrica, e che il secondo membro sia y: Si avrà dunque quest' equazione $0,1125x^4 - 0,725x^3 + 0,9735x^2 + ,0875x = y$.

Si cerchi poi quali saranno i valori delle ordinate y, supponendo le ascisse x successivamente uguali a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Supponendo l'ascisse $x = 1$, il valore dell'ordinata y nella predetta equazione $0,1125x^4 - 0,725x^3 + 0,9735x^2 + 0,875x = y$, sarà $y = 1,2360$.

Dim. Supponendo $x = 1$, l'equazione data diventa $0,1125 \times 1 - 0,725 \times 1 + 0,9735 \times 1 + 0,875 \times 1 = y$, perchè la prima, seconda, terza, e quarta potenza di 1 è 1; dunque $y = 0,1125 - 0,725 + 0,9735 + 0,875$; dunque $y = 1,9610 - ,725$; dunque $y = 1,2360$.

Lo stesso si faccia nelle altre suppositioni di $x = 2$, $x = 3$ &c., e sostituendo questi numeri nell'equazione, si troveranno i valori d'y, come si vede nella Tavola seguente.

x	y
1.	1, 2360
2.	1, 6440
3.	0, 9240
4.	1, 4760
5.	3, 4000
6.	29, 5960
7.	75, 2640

Si

Si tiri una linea indefinita PE (fig. 133) per far la linea delle ascisse; e preso ad arbitrio il punto S per origine delle ascisse, si segneranno le parti uguali ai punti A, B, C, D, E &c. Si alzeranno le perpendicolari Aa, Bb, Cc, Dd &c., e si faranno successivamente uguali alla lunghezza delle ordinate che sono nella Tavola: onde Aa = 1, 2360; Bb = 1, 6440; Cc = 0, 9240 &c.

Si farà finalmente passar una curva per i punti S, *a*, *b*, *c* &c.

Ciò posto, la sola ispezione di questa curva mostra, che le ordinate van crescendo fin verso *r*, poi decrescendo fin verso *t*, indi crescendo rapidamente verso *e*. Appariscе ancora, che nel *Massimo* la curva volta la sua concavità verso l' asse, e nel *Minimo* la sua convessità. Si posson dunque proporre questi due Problemi.

1.° *Dov' è il punto* R, *cui corrisponde il Massimo* Rr? cioè *qual' è il valore del Massimo* Rr?

2.° *Dov' è il punto* T, *cui corrisponde il Minimo* Tt? cioè *qual' è il valore del Minimo* Tt?

Sol. Si differenzj l equazione della curva $0,1125x^4 - 0,725x^3 + 0,9735x^2 + 0,875x = y$. Questa equazione differenziata è $0,45x^3dx - 2,175x^2dx + 1,947xdx + 0,875dx = dy$; perchè se l' equazione proposta fosse $x^4 - x^3 + x^2 + x = y$, differenziandosi ella diverrebbe $4x^3dx - 3x^2dx + 2xdx + dx = dy$. Dunque l' equazione proposta differenziata sarà $0,1125 \times 4x^3dx - 0,725 \times 3x^2dx + 0,9735 \times 2xdx + 0,875 \times dx = dy$, cioè riducendo $0,45x^3dx - 2,175x^2dx + 1,947xdx - 0,875dx = dy$.

Questa equazione (poichè trattandosi di *Massimo* o di *Minimo* $dy = 0$) diviene, $0,45x^3dx - 2,175x^2dx + 1,947xdx + 0,875dx$, ovvero $0,45x^3 - 2,175x^2 + 1,947x + 0,875 = 0$; vale a dire è un' equazione del terzo grado, che dà presso a poco queste tre radici, $x = 1,7$; $x = 3,16$; $x = -3,891$.

Sostituendo successivamente questi valori di x nell' equazione primitiva della curva, si troverà a un di-

presso

presso $y = 1, 399$; $y = 0, 826$; $y = 0, 675$.

Se dunque (nella fig. 133) si fa $SR = x = 1, 7$ incirca, e $Rr = y = 1, 399$ incirca, si avrà il luogo e la grandezza del *Massimo* richiesto.

E se si fa $ST = x = 3, 16$ incirca, e $Tt = y = 0, 826$ incirca, si avrà il punto e 'l valore del *Minimo*.

1008. Riguardo alla radice negativa $x = -3, 891$, ed alla sua ordinata corrispondente $y = 0, 675$, è chiaro che se a sinistra del punto S si prende $SP = 3, 891$; e $Pp = 0, 675$, si avrà un punto p, che appartiene ad una porzione della curva situata verso la sinistra del punto S, e che si avrebbe descritta col prendere le ascisse $x = -1$, $x = -2$, $x = -3$ &c. Questo punto p è anche un *Massimo* o un *Minimo* in questa posizione.

1009. Se poi l' equazione del *Massimo* o un *Minimo* che risulta dalla differenziazione non ha che radici immaginarie, è un segno evidente, che non vi è nè *Massimo* nè *Minimo* nell' espressione di cui si tratta.

1010. Osserv. I. Poichè le dx si prendono sopra una stessa retta, le dy corrispondenti non possion terminar ad una curva, e nel tempo stesso conservar un rapporto costante con queste dx; perchè allora le ordinate sarebbero alle ascisse sempre in questo rapporto costante, poichè le ordinate sarebbero una somma d'antecedenti, e le ascisse una somma di conseguenti sempre nella stessa ragione. In tal caso la linea, cui le ordinate terminerebbero, non potrebbe esser che una retta qual è l'ipotenusa d'un triangolo (fig. 132). Donde siegue, che *in una curva il rapporto di* dy *a* dx *deve sempre variare*, e che prendendosi le dx sopra una stessa retta, è naturale farle costanti, per paragonarle più facilmente alle dy, le quali devon per conseguenza variare continuamente.

1011. Osserv. II. Dalla natura del *Massimo* o del *Minimo* rappresentato da una curva geometrica, si vede, che le tangenti ai punti r, t, devon esser parallele alla linea delle ascisse SD, poichè in questi punti la direzio-

rezione del punto descrivente non l'avvicinerebbe nè l'allontanerebbe dall'asse SD. Dunque in questi punti r, t, le sottangenti son infinite, le normali son uguali alle ordinate rR, tT, e le sunnormali son nulle. Onde *si può trovar il* Massimo *e il* Minimo *per mezzo delle formole differenziali per le tangenti*. Si vede ancora, che nel passaggio per il *Massimo* e 'l *Minimo*, la sottangente, e la normale tendon a prender una situazione opposta a quelle che avean prima di questo passaggio; si può anche da questo cambiamento decidere, se il valore trovato per l'applicazione della regola de' *Massimi* e *Minimi*, è il valore d'un *Massimo* o quello d'un *Minimo*. Poichè la semplice ispezione della figura 133 fa chiaramente conoscere, che se l'espressione della sottangente da positiva deve divenire negativa, il valor dato dal calcolo è un *Massimo*: e se la sottangente da negativa deve divenir positiva, il valor trovato è un *Minimo*.

1012. Osserv. III. Può accadere, che nel passaggio dell'accrescimento o decrescimento dy divenga infinito rapporto a dx, perchè se, per esempio, si esamina il cammino d'un punto che descrive le quattro Iperboli conjugate, che non sono propriamente che una sola e stessa curva chiusa (859), è chiaro che lungo uno de' rami, incominciando dalla sommità, il punto descrivente è alla sommità d'un' ordinata y, di cui la dy va sempre crescendo, in maniera che all'estremità infinita di questo ramo, ed al passaggio nel ramo conjugato, dy è infinitamente grande rapporto a dx; ma deve indi decrescere continuamente, finchè il punto descrivente sia giunto alla sommità di questo ramo conjugato; e così in appresso. Donde si vede, che vi son de' casi, dove per aver un *Massimo* o un *Minimo*, non bisogna fare $dy = 0$, ma $dy = \infty$.

1013. Osserv. IV. Trovar un *Massimo* o un *Minimo* non è propriamente far la differenza di dy ugual a zero o all'infinito; ma per parlare più esattamente, non è altro che cercare la quantità $\frac{dy}{dx}$ che esprime il limi-

te

te del rapporto di dy finito a dx finito, e far poi questa quantità nulla o infinita. Questo è tutto il mistero de' *Massimi*, e *Minimi*. Non è dunque dy che si fa = all'infinito, ciò sarebbe assurdo, perchè dy preso per infinitamente piccolo, non può esser infinito; ma è $\frac{dy}{dx}$; vale a dire si cerca il valore di x che rende infinito il limite del rapporto di dy finito a dx finito.

1014. Osserv. V. Da quanto si è esposto sul Calcolo Differenziale, ben si comprende, che la supposizione che si fa di quantità infinitamente piccole, non è che per abbreviare e per semplificare i ragionamenti; ma che nel fondo questo Calcolo non suppone punto necessariamente l'esistenza di queste quantità. Onde il *Calcolo Differenziale* non consiste che a *determinare algebraicamente il limite d'un rapporto, di cui si ha già l'espressione in linee, e ad uguagliare questi due limiti; il che fa trovare uno de' limiti che si cerca.* Questa definizione è forse la più precisa e la più netta che si possa dare del *Calcolo Differenziale*; ma non può esser ben compresa che quando si sarà reso questo Calcolo familiare; poichè spesso la vera definizione d'una scienza non si comprende bene se non da chi ha studiata la scienza.

Questo è il famoso Calcolo Differenziale. La gloria di tanta invenzione è certamente di Newton, ma non può toglierli nemmen a Leibnitz: e forse entrambi la devon a Barrow. Encycl. art. *Differentiel:* Anche Fra Paolo Sarpi n'ebbe qualche lume.

Tra gli Autori dell'Analisi degl'Infiniti, i più metodici sono il Marchese de l'Hopital *Analyse des Infiniments Petits*, Agnesi *Istituzioni Analitiche*, Manfredi, Riccati &c.

CA-

CAPITOLO VII.

Del Calcolo Integrale.

1015. IL *Calcolo Integrale* è l' inverso del Calcolo Differenziale. Egli consiste a trovar la quantità finita, di cui una quantità infinitamente piccola proposta è la differenziale. Supponendo che siasi trovata la differenziale di x^m, che è $mx^{m-1}dx$; se poi si propone di trovar la quantità, di cui $mx^{m-1}dx$ è la differenziale, che è x^m, questa operazione forma il *Calcolo Integrale*, da Newton e dagl' Inglesi chiamato *Metodo inverso delle Flussioni*.

1016. La Lettera $\int$ (iniziale della parola somma) serve di caratteristica per indicare una *integrazione* da farsi; onde $\int adx$, significa, che bisogna integrare adx, e si pronuncia *somma* adx.

1017. Si possono prendere per formole integrali le quantità differenziate da 965 fin 986. Onde $\int adx = ax$; $\int (xdy + ydx) = xy$ &c.

1018. Lorchè non vi è che una variabile in un' espressione differenziata, o lorchè una differenziale è composta d' un sol termine, se ne trova facilmente l' *integrale* per mezzo della formola (968), secondo la quale $\int ax^m dx = \frac{ax^{m+1}}{m+1}$; Onde si può stabilire questa regola. *Si cancelli la differenziale, si aumenti d' un' unità l' esponente della variabile, e si divida tutto per questo esponente così aumentato.*

1019. Quasi tutta l'arte del *Calcolo Integrale* consiste ad applicar questa regola all'espressioni differenziate, e farvi delle preparazioni necessarie, per metterle in istato d'esser integrate per mezzo di questa regola. E lorchè un' espressione differenziata non è suscettibile di preparazioni proprie per farne un' integrazione compita, si procura trasformarla in qualch' altra, di cui l' inte-

integrale ſia la ſteſſa che quella che darebbe la quadratura o la rettificazione d'una Sezione Conica, o anche d'una curva di un ordine più elevato, o la ſteſſa che quella, ch'eſprimerebbe il logaritmo d'un numero, o d'un ſeno. Or ſiccome la quadratura e la rettificazione della maggior parte di queſte curve non han potuto ancora eſſer determinate in rigore geometrico, e che la maggior parte de' ſeni ſon incommenſurabili rapporto al ſeno totale; ſiegue, che in queſti caſi queſte ſorti d'integrazioni non ſono determinate che per approſſimazione, o che non ſi poſſon ridurre in numero che a un dipreſſo. Finalmente per ultimo ſpediente, ſi cerca la ſerie infinita, di cui la ſomma farebbe uguale all'integrale cercata.

Da queſt'eſpoſto facilmente ſi vede, che il Calcolo Integrale è un'arte non ſolo incompleta, ma ancora eſtremamente complicata, e che non arriva ſovente che ad approſſimazioni.

Ricorra all'Opere di M. Bougainville il giovane, e de' PP. le Seur e Jaquier, chi deſidera una piena cognizione di queſta parte importante delle Matematiche. Quì non ſe ne dà che una leggiera idea, portando alcuni eſempj dell'uſo di queſto calcolo nella Geometria, e ſopra tutto nella parte più facile, ch'è quella delle ſerie, per far vedere la corriſpondenza di quelle, che ſi trarranno dal calcolo integrale, con quelle dedotte già nelle Sezioni Coniche per mezzo dell'Analiſi comune.

1020. L'uſo del *Calcolo Integrale* nella Geometria ſublime conſiſte principalmente a trovar le quadrature delle ſuperficie piane e curve; le cubature o ſolidità de' corpi; la rettificazione delle curve, vale a dire la lunghezza d'una linea retta uguale ad un arco di curva data; la natura o l'equazione d'una curva per l'eſpreſſione algebraica data della ſua tangente o ſottangente, o della ſua normale, o ſunnormale &c. E' quaſi impoſſibile penetrar a fondo e con ſucceſſo in alcuna delle Scienze Fiſico-Matematiche ſenza il continuo ſoccorſo di queſto Calcolo.

Per

Per le Quadrature delle Superficie Piane e Curve.

1021. E' evidente, che la quadratura d' uno ſpazio (fig. 86) CPML è la ſomma de' piccoli parallelogrammi *pqmn*, de' quali l' eſpreſſione differenziale è ydx. Dunque la formola per le quadrature degli ſpazj rinchiuſi tra un arco di curva, due ordinate e la porzione dell'aſſe, cui terminano le ordinate, è $\int ydx$.

1022. Nella Parabola, ove $px = y^2$, ſi ha $p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$, e $p^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$; dunque $ydx = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx$. Integrando per la regola generale (1018) ſi avrà $\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = p^{\frac{1}{2}} \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = p^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{3} \times x^{\frac{3}{2}}$. Ma $p^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}}$; dunque $p^{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{y}{x^{\frac{1}{2}}} \times \frac{2x}{3} = \frac{2yx}{3x^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} yx$ $= \frac{2}{3} yx$. E queſta è la quadratura eſatta della Parabola (897).

1023. Nell' Eliſſi ſi è trovato (901) $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$; e perchè $\sqrt{a^2 - x^2}$ è un'incommenſurabile, ſi può toglier il ſegno radicale, e ridurre $\sqrt{a^2 - x^2}$ in una ſerie infinita (334). Si avrà dunque $y = \frac{b}{a} \left(a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ &c.} \right) = b - \frac{bx^2}{2a^2} - \frac{bx^4}{8a^4} - \frac{ba^6}{}$

$\frac{ba^6}{26a^6} - \frac{5bx^8}{128a^8}$ &c.; per conseguenza $ydx = bdx - \frac{bx^2dx}{2a^2} - \frac{bx^4dx}{8a^4} - \frac{bx^6dx}{16a^6} - \frac{5bx^8dx}{128a^8}$ &c. Dunque prendendo le integrali di ciascun di questi termini (1018) si avrà la quadratura dell'Ellissi $bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$ &c. come (901).

Nella stessa maniera si calcolerà la Quadratura del Circolo e dell'Iperbole.

1024. Probl. I. *Trovar la quadratura della superficie d'un Fuso Parabolico.*

Spiegazione. Nella parabola mMS il parametro $= a$, (fig. 130) l'ascissa $= x$, l'ordinata y, un lato infinitamente piccolo $mM = \sqrt{dy^2 + dx^2}$ (947). Supponsi che questa parabola giri sul suo asse; in questa rotazione ciascuno de' suoi lati infinitamente piccoli descriverà un cono retto troncato infinitamente sottile, ch'è uno degli elementi del solido generato. La superficie di questo cono troncato o Fuso parabolico è ugual (680) al prodotto della lunghezza $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ di questo lato moltiplicato per la circonferenza descritta dall'estremità dell'ordinata y. Se dunque si fa come un raggio qualunque r: alla sua circonferenza c:: così l'ordinata y: alla circonferenza descritta per l'estremità di questa ordinata $= \frac{cy}{r}$, si avrà $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} \times \frac{cy}{r}$ per la superficie d'un Fuso qualunque Paraboloco. Ora si domanda l'integrazione di questa quantità.

Sol. La superficie curva d'un Fuso Parabolico è

$c(a^2$

$$\frac{a^2+4y^2)\sqrt{(a^2+4y^2)} - a^3c}{12ar}.$$

Dim. 1.° $ax = yy$ (828); dunque $adx = 2ydy$, e $a^2dx^2 = 4y^2dy^2$, dunque $dx^2 = \frac{4y^2dy^2}{a^2}$.

2.° Un elemento qualunque della ſuperficie del ſolido, di cui ſi tratta, è $= \frac{cy}{r}\sqrt{(dy^2+dx^2)} = \frac{cy}{r}\sqrt{(dy^2+\frac{4y^2dy^2}{a^2})} = \frac{cy}{r}\sqrt{(\frac{a^2dy^2+4y^2dy^2}{a^2})} = \frac{cy}{r}\sqrt{a^2+4y^2}\times\frac{dy^2}{a^2}$. Ma $\sqrt{\frac{dy^2}{a^2}} = \frac{dy}{a}\sqrt{}$; dunque $\sqrt{a^2+4y^2}\times\frac{dy^2}{a^2} = \frac{dy}{a}\sqrt{a^2+4y^2}$; dunque $\frac{cy}{r}\sqrt{a^2+4y^2}\times\frac{dy^2}{a^2} = \frac{cydy}{ar}\times\sqrt{(a^2+y^2)} = \frac{cydy(\sqrt{a^2+4y^2})}{ar}$.

3.° per ridurre queſta eſpreſſione in un'altra, cui la regola generale dell' integrazione ſia applicabile, ſia $\sqrt{a^2+4y^2} = z$, dunque $a^2+4y^2 = z^2$, dunque $8ydy = 2zdz$, e $ydy = \frac{2zdz}{8}$, e $ydy = \frac{zdz}{4}$. Or ſe $ydy = \frac{zdz}{4}$, e $\sqrt{a^2+4y^2)} = z$, dunque $\frac{cydy\sqrt{(a^2+4y^2)}}{ar} = \frac{cz^2dz}{4ar}$.

4.° L'integrale di $\frac{cz^2dz}{4ar} = \frac{cz^2+1}{3\times 4ar} = \frac{cz^3}{12ar}$; ma essendo $z = \sqrt{a^2+4y^2}$, e $z^2 = a^2+4y^2$, dunque

$$\frac{cz^3}{12ar} = \frac{c(a^2+4y^2)\sqrt{a^2+4y^2}}{12ar}.$$

5.° Ma per esaminare, se in quest'ultima espressione vi sia qualche costante da aggiunger o da sottrarre, bisogna vedere se facendo $y = o$, la predetta espressione diviene $= o$; or la formola $\frac{c(a^2+4y^2)\sqrt{a^2+4y^2}}{12ar}$ diviene $\frac{a^2c\sqrt{a^2}}{12ar} = \frac{a^3c}{12ar} = \frac{a^2c}{12r}$; Dunque bisogna sottrarre questa costante, e far la formola che dà la vera superficie della curva cercata

$$\frac{c(a^2+4y^2(\sqrt{a^2+4y^2}+a^2c}{12ar} - \frac{a^2c}{12r} = \frac{c(a^2+4y^2)\sqrt{a^2+4y^2}}{12ar} - \frac{a^2c}{12r}.$$

Per la Rettificazione delle Curve.

1025. La *Rettificazione* delle curve riferite ad un asse si fa per mezzo dell' integrazione della formola $ds = \sqrt{dy^2+dx^2}$ (993). Si è già veduto 957, che nella Parabola $\sqrt{dy^2+dx^2} = dy\sqrt{p^2+4y^2} = dy\sqrt{1+\frac{4y^2}{p}}$, facendo $p = 1$. Questo radicale cambiato in serie (334) diviene $1 + 2y^2 - 2y^4 - 4y^6 - 10y^8$ &c. Dunque $\sqrt{dy^2}$

$\sqrt{dy^2+dx^2} = dy + y^2dy - 2y^4dy + 4y^6dy - 10y^8dy$ &c.

L'integrale è $y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{2}{5}y^5 + \frac{4}{7}y^7 - \frac{10}{7}y^9$ &c.

che dà la lunghezza d'una linea retta, che sarebbe stata ripiegata sulla parabola, dalla sommità fin all'incontro dell'ordinata y.

1026. Nel circolo, ove si suppone il raggio $= 1$, si ha $y^2 = 2x - x^2$, e per conseguenza $2ydy = 2dx - 2xdx$, ovvero $dx = \frac{ydy}{1-x}$, e $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{1-2x+x^2}$. Ma poichè $2x - x^2 = y^2$, e $dx^2 = \frac{y^2dy^2}{1-y^2}$; dunque $dx^2 + dy^2 = \frac{y^2dy^2}{1-y^2} + dy^2$, o mettendo tutto in frazione $\frac{y^2dy^2 + dy^2 - y^2dy^2}{1-y^2} = \frac{dy^2}{1-y^2}$; e $\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ $= dy \times (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$. Or l'espressione $(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{8}y^4 + \frac{5}{16}y^6 + \frac{35}{128}y^8$ &c. dunque $\sqrt{dx^2+dy^2} = dy + \frac{1}{2}y^2dy + \frac{3}{8}y^4dy + \frac{5}{16}y^6dy + \frac{35}{128}y^8dy$ &c.

di cui l'integrale è $y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{35}{1152}y^9$, che può essere rappresentata sotto questa for-

mola $y + \frac{1}{2.3} y^3 + \frac{1.4}{2.4.5} y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} y^9$

&c.

1027. Un' ordinata al circolo è il seno dell'arco compreso tra l' origine delle ascisse e l' ordinata. Si può dunque coll'ajuto di questa serie calcolar la lunghezza d' un arco di circolo, di cui il seno è noto; e questa serie convergerà tanto più velocemente, quanto il seno corrisponderà ad un arco d' un più piccolo numero di gradi, perchè sarà una frazione del raggio, la quale sarà ancora altrettanto più piccola. Onde si può calcolare con molta facilità la lunghezza dell'arco di 30 gradi, per mezzo del suo seno, che è = 0, 5; indi moltiplicando questa lunghezza per 6, si avrà quella della semi-circonferenza, e perciò il rapporto del diametro del circolo al suo contorno, il che darà la quadratura del circolo. Si avrà, per esempio, 0, 5 + 0, 020833 + 0, 002344 + 0, 000349 + 0, 000059: La somma è = 0, 523585; il suo prodotto per 6 = 3, 14151, come (581). Per la maggior esattezza convien calcolare più termini, e più decimali.

Per la Cubatura de' Solidi.

1028. La cubatura o solidità de' Solidi si trova per mezzo dell' integrazione dell' espressione differenziale della solidità d'uno degli elementi, de' quali il corpo è composto. Lorchè, per esempio, il solido è prodotto dalla rotazione d' una curva sul suo asse, ciascun elemento è un cono retto troncato, di cui la solidità deve esser uguale al prodotto del suo asse, o grossezza dx per la superficie del circolo descritto dall' ordinata y, che passa per il mezzo del lato infinitamente piccolo, che forma la superficie di questo cono. Or (1024) il circolo descritto dall' ordinata y, ha $\frac{cy}{r}$ per l'espres-

sione

sione della sua circonferenza, e per conseguenza (568) $\frac{cy}{2r} \times y$, o $\frac{cy^2}{2r}$ è l' espressione della sua superficie. Dunque l' espressione generale della cubatura d'un elemento qualunque d'un solido di rivoluzione è $\frac{cy^2dx}{2r}$, e la formola d' integrazione che dà la solidità di questo solido, è $\frac{cy^2dx}{2r}$, in cui bisogna sostituire il valore d' y^2 tirato dall' equazione della curva, per aver poi per mezzo dell' integrazione la cubatura del solido.

1029. Così il raggio del circolo generatore d' una sfera essendo $= r$, l' equazione del circolo è $y^2 = 2rx - x^2$; dunque la formola differenziale della cubatura diviene $cxdx - \frac{cx^2dx}{2r}$, di cui l' integrale $\frac{1}{2}cx^2 - \frac{cx^3}{6r}$ esprime la solidità d' un segmento di sfera, di cui il raggio $= r$, e la grossezza $= x$. Se dunque si fa $x = 2r$, si avrà $2cr^2 - \frac{4cr^2}{3} = \frac{6cr^2 - 4cr^2}{3} = \frac{2}{3}cr^2 = \frac{2}{3} \times 2r \times \frac{1}{2}cr$; vale a dire la solidità di tutta la sfera è ugual ai due terzi del prodotto dell' asse per la superficie del suo gran circolo.

Per il Metodo inverso delle Tangenti.

1030. Si chiama *Metodo inverso delle Tangenti* quello per cui si scuopre la natura o l' equazione d' una curva, essendo data solamente l' espressione algebraica della sua tangente, o della sua sottangente, o della sua normale, o sunnormale. Dicesi ancora, che un Proble-

ma appartien al metodo inverſo delle tangenti, lorchè ſi cerca l'equazione d'una curva per mezzo dell' eſpreſſione algebraica della ſua rettificazione, della ſua quadratura &c.

Data dunque l'eſpreſſione Algebraica d'una linea che appartiene alla tangente, biſogna farne un' equazione coll'eſpreſſione differenziale della ſteſſa linea; e ſe ſi può integrare queſt' equazione, ſi avrà quella della curva che ſi cerca.

1031. Si domanda, per eſempio, qual è la curva, di cui la ſottangente è $\frac{y^2}{a}$. Si avrà dunque (990) $\frac{ydx}{dy} = \frac{y^2}{a}$, o $aydx = y^2dy$, o $adx = ydy$; ed integrando ſarà $ax = \frac{1}{2}y^2$, o $2ax = y^2$, equazione della parabola, di cui il parametro è $2a$.

1032. Qual' è la curva, di cui la ſunnormale è $a - x$? Si ha (994) $\frac{ydy}{dx} = a - x$, o $ydy = adx - xdx$. Integrando ſarà $\frac{1}{2}y^2 = ax - \frac{1}{2}x^2$, o $y^2 = 2ax - x^2$, che è l'equazione del Circolo.

1033. Qual'è la curva, di cui la ſunnormale è coſtante, ovvero $= 1$? Si ha $\frac{ydy}{dx} = 1$; dunque $ydy = dx$; e integrando $\frac{1}{2}y^2 = x$, e $y^2 = 2x$: equazione della parabola, di cui il parametro $= 2$.

1034. Si applica ancora nella Geometria il Calcolo Infiniteſimale all' eſpreſſioni algebraiche, che hanno eſponenti variabili, come a^x, e x^y, ed all' equazioni delle curve, che han termini affetti di ſimili eſponenti. Queſte Curve ſi chiaman *eſponenziali*, ed il Calcolo, che ſe ne fa, ſi chiama anche il *Calcolo Eſponenziale*.

TRI-

TRIGONOMETRIA SFERICA

DEL PADRE

RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH.

1. LA Trigonometria sferica è l'arte di risolvere i triangoli sferici, cioè quelli, che nella superficie della sfera sono contenuti dagli archi de' Circoli detti massimi, i piani de' quali passano pel centro della sfera. Sei cose in questi triangoli, come ne' triangoli piani, si devono considerare; cioè tre lati, e tre angoli. La Trigonometria Sferica insegna, in qual maniera date tre di queste sei cose, le altre si possino ritrovare. Premetteremo tre Lemmi, il primo de' quali spetta agli elementi di Geometria; gli altri poi, che possono essere di uso anche nella Trigonometria piana, appartengono alla dottrina de' seni, e delle tangenti: indi dimostreremo ciò che dalla dottrina delle sfere si ricava di necessario a questa nostra Trigonometria: e finalmente giunti a parlare della Trigonometria, tratteremo primieramente degli angoli rettangoli, indi degli obliquangoli.

LEMMA PRIMO.

2. *Se la linea* AD (fig. 143.) *si tagli in qualunque modo in* E, *e per metà in* I, *sarà* AI *ovvero* ID *la semisomma, e* IE *la semidifferenza de' segmenti* AE, ED.

La prima parte è chiara, essendo AD la somma, e AI sua metà, la semisomma. La seconda parte si dimostra in questo modo. Si faccia AO verso D eguale a DE;

a DE; sarà IO eguale ad IE. Ma OE sarà la differenza delle stesse AE, AO, e perciò delle stesse AE, ED. Dunque IE sarà la semidifferenza. Lo stesso pure sarà, se il punto e si prenda fuori di AD, e si consideri De come negativa, presa pure Ao, ma alle parti opposte. Imperciocchè se De si consideri come positiva; diventa ID la semidifferenza, Ie la semisomma delle medesime Ae, eD.

3. Corollar. *Se alla semisomma verrà aggiunta la semidifferenza, si avrà il segmento maggiore; se sottratta, il minore. Se la semidifferenza sarà maggiore della semisomma, l' altro segmento sarà negativo, e cadrà alle parti opposte.*

LEMMA II.

4. *Nel triangolo rettangolo il lato è il seno dell' angolo a se opposto, e il coseno dell' angolo contiguo, se la base si prenda pel raggio: sarà poi la tangente di quello, e la cotangente di questo, se l' altro lato si prenda pel raggio.*

Imperciocchè presa per raggio la base BC (fig. 144.) del triangolo BAC rettangolo in A, si descriva il circolo che s'incontra col lato BA prolungato in D, sarà il lato CA la perpendicolare che discende dall'altro estremo C dell' arco DC nel raggio BD condotto per l' altro estremo, che è la stessa definizione del seno dell' arco DC o sia dell'angolo B opposto al lato AC. Perchè poi a motivo dell'angolo retto A, gli angoli ACB, ABC insieme compiono (*lib.* 1. *prop.* 32) l' angolo retto, sarà AC insieme il seno del complemento dell' angolo ACB a se contiguo, che dicesi suo coseno.

Ma se il circolo descrivasi, preso per raggio il lato BA; parimenti dalla stessa nozione della tangente apparirà, che l' altro lato AC sarà la tangente dell'angolo C a se opposto; e però sarà la tangente del complemento dell'angolo ACB a se contiguo, che dicesi sua cotangente.

5. Co-

5. Corollar. *Il rettangolo della tangente nella cotangente, è eguale al quadrato del raggio.*

Imperocchè preso AB per raggio, sia AC la tangente dell'angolo a se opposto, e preso CA per raggio, AB sia cotangente dell'istesso angolo B a se contiguo; sarà come AC ad AB: così tanto la tangente dell'angolo B al raggio, come il raggio alla cotangente: e però (*lib.* 6. *prop.* 16.) il prodotto della tangente nella cotangente, è eguale al quadrato del raggio.

LEMMA III.

6. *La somma de' seni di due archi è alla differenza, come la tangente della semisomma degli stessi archi alla tangente della semidifferenza.*

Siano gli archi AE, ED (fig. 145.), i cui seni AF, DG siano perpendicolari al raggio CE, tagliato dalla corda AD in P, la qual corda sia tagliata per metà, e ad angoli retti (3. *lib.* 1.) in H dal raggio CL, il quale ancora taglierà per metà l'arco AD in L. (30. *lib.* 3.) Sarà AL (*n.* 4.) la semisomma, LE la semidifferenza de' loro archi, AH la semisomma, HP la semidifferenza delle rette AP, PD: e a motivo degli angoli retti in H, se prendasi CH per raggio, sarà HA la tangente dell'angolo ACH (*n.*4.) e però dell'arco LA, il quale è la sua misura, e HP sarà la tangente dell'angolo HCP, e però dell'arco LE. I triangoli poi AFP, DGP, i cui angoli in F e in G sono retti, e gli angoli in P opposti al vertice sono uguali, sono equiangoli; e però (*lib.* 4. 6.) stà il seno AF al seno DG come AP a PD. Per la qualcosa la somma de' loro seni alla differenza è come la somma delle rette AP, PD alla differenza, e come la loro semisomma AH alla semidifferenza HP; ovvero come la tangente della semisomma AL alla tangente della semidifferenza LE.

7. Corollar. *La somma de' coseni ovvero seni de' complementi alla differenza, è come la cotangente*

ovve-

ovvero tangente del complemento della ſemiſomma alla tangente della ſemidifferenza.

Infatti ſi produca AG ſino alla periferia del circolo in M, e ſi prendano i quadranti LN, EO. Levato il comune EN, ſarà NO eguale ad LE: ſarà pure DO il complemento di DE; e giacchè levato dal ſemicircolo ADM il quadrante EO, gli archi AE, OM inſieme uguagliano il quadrante; OM ſarà il complemento di EA. Parimenti DN è complemento di LD, e NM è complemento di LA, il qual arco NM ſarà uguale all' iſteſſo BN a motivo di AL, LD eguali. Ma la ſomma (*n.* 6.) de' ſeni DO, OM è alla differenza, come la tangente della loro ſomiſomma DN alla tangente della ſemidifferenza ON. Dunque la ſomma de' coſeni degli archi ED, EA ſarà alla differenza, come la cotangente della ſemiſomma LD alla tangente della ſemidifferenza LE.

DELLA DOTTRINA DE' SFERICI

DEFINIZIONE I.

8. *LA Sfera è un ſolido compreſo da una ſola ſuperficie, entro la quale è un punto che chiamaſi Centro, dal qual punto tutte le rette che ſon condotte alla ſua ſuperficie, ſono tra ſe eguali, e chiamanſi raggi della sfera, ovvero ſemidiametri; e la retta condotta pel centro della sfera e terminata alla ſuperficie da ambe le parti, chiamaſi diametro della sfera.*

Vien generata la sfera dalla rotazione del ſemicircolo circa il proprio diametro immobile, finchè ritorni d'onde è partito: perchè tutte le linee rette condotte dal centro immobile del ſemicircolo alla ſua periferia eſſendo tra di ſe eguali, anche tutte le rette condotte dall'iſteſſo punto alla ſuperficie del ſolido generato, ſaranno eguali. La figura 146. rappreſenta ſoltanto

tanto la metà d' una sfera, per non cagionar confusione; il cui centro è C, i raggi eguali sono CP, CA, CF ec. il diametro è Pp, ovvero AD.

9. Corollar. 1. *Se la sfera in qualunque modo si tagli con un piano, la sezione sarà un circolo.*

Si tagli primieramente la sfera col piano ABD, il quale passi per il centro C, tutte le rette, che dal centro della sfera C si conducono all' intersezione del suo piano con la superfizie della stessa sfera, come CA, CB, CD, saranno eguali al raggio dell' istessa sfera (*n.* 8.); perciò tutti i punti, A, B, D cadranno nella periferia del circolo, il cui centro è C.

Si tagli secondariamente la sfera col piano EFH, che non passi per il centro, e per il centro della sfera C si conduca la retta CG perpendicolare all'istesso piano (*lib.* 11. 11.) e a due punti qualunque del perimetro della sezione, come F, H si conducano da C e G le rette CF, CH, GF, GH. Saranno gli angoli CGF, CGH retti a motivo di CG perpendicolare a tutto il piano FGH. Per la qual cosa i quadrati CG, GF (*lib.* 1. 47.) insieme saranno eguali al quadrato CF, e però al quadrato CH, o sia ai due quadrati CG, GH insieme (*n.* 8.), e levato il comune CG, i quadrati GF, GH, e le stesse rette GF, GH saranno eguali. Accadendo ciò rimanendo il punto H, e variato in qualunque modo il punto F; sarà il perimetro della sezione la periferia del circolo, il cui centro è G, il raggio GH.

10. Corollar. 2. *I circoli, i cui piani passano per il centro della sfera, sono tra di se eguali, e maggiori di tutti quelli, i cui piani non passano pel centro della sfera.*

Infatti se ABD sia qualunque de' circoli, i cui piani passano pel centro C, sarà il suo raggio CD eguale al raggio della sfera; e però i raggi di tutti i circoli di simil natura, sono eguali tra di se, e gli stessi circoli sono eguali.

Ma in qualunque circolo EFH, il cui piano non passa pel centro, il raggio GH è minore del raggio della

la sfera CH, perchè il suo quadrato è eguale ai quadrati CG, GH insieme presi, e però è maggiore del solo quadrato GH.

DEFINIZIONE II.

11. *Quindi i circoli, i cui piani passano per il centro della sfera, si chiamano circoli massimi della sfera.*

12. Corollar. 1. *Tutti i circoli massimi si tagliano scambievolmente per metà, e la comune intersezione de' loro piani, è il diametro della sfera.*

Infatti passando i piani di tutti i Circoli pel centro, s'incontrano nello stesso centro, e però non sono paralleli, quindi (*lib.* 3. 11.) si tagliano scambievolmente in qualche retta, la quale passando pel centro della sfera ad essi comune, sarà l'intersezione e il diametro de' loro circoli, i quali perciò taglierà per metà, e sarà il diametro della sfera.

13. Corollar. 2. *Per due qualunque punti presi nella superficie della sfera si può condurre un circolo massimo, e per qualunque punto si può condurre un circolo massimo perpendicolare al circolo massimo già dato.*

E'chiara la prima parte, perchè se i due punti dati si congiungano col centro, e tra di sè, il triangolo giacerà tutto sullo stesso piano, (*lib.* 2. 11.) col qual piano se si taglierà la sfera, la sezione sarà il circolo massimo, e passerà per i due dati punti.

E' chiara la seconda parte, perchè da quel dato punto si può abbassare una perpendicolare sul piano del dato circolo massimo, (*lib.* 11. 11.) e congiunti gli estremi suoi punti sul centro, si fa un triangolo che tutto parimenti giace sull'istesso piano, col quale se si tagli la sfera, la sezione sarà un circolo massimo, e perpendicolare (*lib.* 18. 11.) al dato circolo massimo.

DE-

DEFINIZIONE III.

14. *Il diametro della sfera perpendicolare al piano del circolo nato dalla sezione della sfera, si chiama il suo asse; e gli estremi punti dell' asse, si chiamano i suoi poli.*

Così Pp è l' asse de' circoli EFH, ABD, e i punti Pp sono i suoi poli.

15. Corollar. 1. *Tutti i punti della periferia di qualunque circolo nella superficie della sfera, sono lontani per archi eguali de' circoli massimi dall' istesso lor polo.*

Se difatti si prendano due di questi punti qualunque, H, e F, e per essi, e per il polo P si conducano (*n.* 13.) i circoli massimi PHp, PFp, e i raggi HC, FC, HG, FG; ne' triangoli CGF, CGH a motivo di tutti i lati eguali, saranno eguali gli angoli in C (*lib.* 8. 1.) e però anche gli archi PH, PF saranno eguali. (*lib.* 26. 3.)

16. Corollar. 2. *Il circolo massimo da ambi i suoi poli per ogni parte è lontano un quadrante di circolo massimo; e quel circolo, di cui un qualche punto è lontano un quadrante di circolo massimo dal suo polo, è massimo.*

Imperciocchè se il circolo sar[illegible]assimo, come ABD, passerà per il centro C, e i ra[illegible] CB, CD, che saranno la sua intersezione coi pia[illegible]'Fp, PHp, saranno perpendicolari all' asse PCp, il quale infatti per la sua stessa definizione è perpendicolare a tutto il piano ABD; e però tanto gli archi PB, PD, quanto gli archi pB, pD saranno quadranti.

Se poi il circolo non sarà massimo, come EFH, il suo piano non passerà pel centro; e però tagliata la sfera pel centro col piano ABD parallelo all' istesso EFH, saranno PB, PD, pB, pD quadranti, e però PF, PH saranno minori di quelli, e pF, pH maggiori. Dunque quel circolo, di cui un qualche punto è lon-

ontano un quadrante dal polo, non sarà non massimo, e però sarà massimo.

DEFINIZIONE IV.

17. *L' angolo sferico è quello, il quale nella superficie della sfera vien contenuto da due archi de' circoli massimi, concorrenti in qualche punto: Per la cui misura si considera l' angolo rettilineo contenuto dalle rette le quali giaciono coi medesimi archi nei medesimi piani, e alle medesime parti, e li toccano nello stesso concorso.*

Così FPH è un angolo sferico, a cui si sostituisce un angolo rettilineo fPh, contenuto dalle tangenti Pf, Ph.

18. Corollar. 1. *Se un arco cade sopra un arco, fa due angoli, o retti, o eguali a due retti.*

Imperciocchè la tangente fP, con la tangente ePh fa due angoli (*lib.* 13. 1.) o retti, o eguali a due retti.

19. Corollar. 2. *Se due lati di un angolo si prolunghino oltre il vertice, conterranno angoli eguali opposti al vertice.*

Imperocchè se le tangenti fP, HP si prolungheranno oltre il vertice P, conterranno angoli eguali al vertice P. (*lib.* 15. 1.)

20. Corollar. 3. *Se i piani dei lati saranno tra di se scambievolmente perpendicolari, l' angolo sarà retto: e se l' angolo sarà retto, i piani saranno tra se stessi scambievolmente perpendicolari.*

Imperocchè se il piano FPp sarà perpendicolare al piano HPp, la tangente fP, che è perpendicolare al diametro Pp (*lib.* 16. 3.) comune intersezione de' loro piani (*n.* 12.) sarà perpendicolare (*definiz.* 4. *lib.* 11.) a tutto il piano HPp, e però anche alla tangente Ph.

Se poi la tangente fP sarà perpendicolare alla tangente Ph, essendo ancora perpendicolare al diametro Pp; sarà (4. *l.* 11.) perpendicolare a tutto il piano

no HPp, e perciò (11. *l.* 11.) anche il piano FPp sarà perpendicolare ad esso.

21. Corollar. 4. *Se da qualunque punto del diametro della sfera che passa pel vertice dell' angolo, escano ne' piani degli stessi archi due rette ad esso perpendicolari, conterranno un angolo rettilineo eguale ad uno sferico.*

Imperocchè se queste rette saranno GF, GH, queste saranno parallele alle rette Pf, Ph (28. *l.* 1.) che sono perpendicolari allo stesso diametro Pp. (13. *l.* 3.) E però l'angolo FGH sarà eguale (10. *l.* 11.) all' angolo fPh.

22. Corollar. 5. *La misura d'un angolo sferico sarà l' arco di qualunque circolo che abbia il polo nel suo vertice intercetto tra suoi lati.*

Imperciocchè tagliata la sfera in qualsivoglia piano ABD, o EFH perpendicolare al diametro Pp che è la comune intersezione de' piani degli archi PF, PH, la sezione sarà un circolo che ha il polo P (*n.* 14.) il cui arco BD, o FH intercetto da lati PF, PH, sarà la misura dell' angolo BCD, o FGH, il quale essendo contenuto da raggi BC, CD, o FG, GH perpendicolari al diametro Pp perpendicolare al piano ABD, o EFH, è eguale all' angolo sferico FPH. (*n.* 21.)

23. Corollar. 6. *Se i lati di un angolo sferico si prolunghino, di nuovo così s' incontrano, che compiono un semicircolo, e contengono un angolo sferico eguale al primo.*

Infatti essendo PCp il diametro di ambedue gli archi PF, PH, prolungandosi amendue, debbono passare per p; e saranno PFp, PHp i semicircoli, e la misura comune degli angoli FpH, FPH sarà l' arco BD, ovvero FH. (*n.* 22.)

24. Corollar. 7. *Un circolo massimo perpendicolare ad un circolo massimo, passa per i suoi poli; e se un circolo massimo passa per i poli di un circolo massimo, è ad esso perpendicolare.*

Sia il circolo massimo PBp perpendicolare al circolo massimo ABD, sarà il piano PBp perpendicolare al piano ABD. (*n.*20.) Per la qual cosa se si tagli la sfera con un altro piano APDp per il centro C perpendicolare all'istesso piano ABD; anche l'intersezione PCp sarà ad esso perpendicolare (19. *l.* 11.); e però (*n.* 14.) i punti P, p, che giaciono nel circolo PBp, saranno i poli del circolo ABD.

Se poi il circolo massimo PBp passi pel polo P del circolo massimo ABD, passerà per il suo asse PCp ad esso perpendicolare; e però (18. *l.* 11.) sarà ad esso perpendicolare.

DE' TRIANGOLI SFERICI

DEFINIZIONE.

25. *IL triangolo sferico dicesi quello, che vien contenuto nella superficie della sfera sotto tre archi de' circoli massimi, che chiamansi suoi lati.*

26. Corollar. 1. *Se in un triangolo sferico due angoli saranno retti; i lati ad essi opposti saranno quadranti: E se due lati saranno quadranti, gli angoli ad essi opposti saranno retti; e in amendue questi casi il terzo lato sarà la misura del terzo angolo.*

Se infatti i due angoli PBD, PDB saranno retti, il punto P, che è la comune intersezione de' circoli BP, DP sarà (*n.* 24.) il polo del circolo BD, e PB, PD saranno i quadranti. (*n.* 16.)

Se poi gli archi PB, PD saranno quadranti, gli angoli BCP, DCP saranno retti, e però (4. *l.* 11.) la retta CP sarà perpendicolare a tutto il piano BCD; e quindi (18. *l.* 11.) i piani degli archi PB, PD saranno perpendicolari al piano dell'arco BD, e gli angoli PBD, PDB saranno retti. (*n.* 20.)

Ma in amendue questi casi essendo P il polo del circolo BD, l'arco BD è (*n.* 22.) la misura dell'angolo PBD.

27. Co-

27. Corollar. 2. *Se tutti gli angoli saranno retti, tutti i lati saranno quadranti; e se tutti i lati saranno quadranti, tutti gli angoli saranno retti.*

Imperciocchè nel primo caso due angoli opposti a due lati qualunque, essendo retti, que' due lati saranno quadranti; e parimenti nel secondo caso due lati opposti a due angoli qualunque essendo quadranti, questi due angoli saranno retti.

Quindi è chiara la risoluzione de' triangoli di simil natura, per cui non ci è bisogno della Trigonometria. Resta ora che trattiamo di que' triangoli, in cui un angolo è retto, e chiamansi rettangoli; e di quelli, in cui nessun angolo è retto, e si chiamano obliquangoli. In quelli il lato opposto all' angolo retto dicesi base; in questi poi qualunque lato può prendersi per base.

DELLA TRIGONOMETRIA SFERICA

PARTE PRIMA.

De' triangoli rettangoli.

28. Sia il triangolo DAB (Fig. 147.) rettangolo in A. Il circolo del lato AD sia ADEF, a cui se si prolunghino il lato AB, e la base DB, così si incontreranno in qualche luogo in E, e F, che (*n.* 23.) ABE, DBF siano semicircoli, e AE, DF diametri. Conducasi BC, poi BI perpendicolare al piano ADE (11. *l.* 11.) la quale s' incontrerà in qualche luogo (38. *l.*) in I col diametro AE ad angoli retti: dipoi IG perpendicolare al diametro DCF, e BG, che sarà perpendicolare allo stesso diametro; perchè il piano BIG sarà (18. *l.* 11.) perpendicolare al piano GIC; e però (*def.* 4. l. 11.) CG sarà perpendicolare al piano BGI, essendo perpendicolare all' interfezione IG de' piani IGB, IGC tra se stessi vicendevolmente perpendicolari. Finalmente tagliati i semicircoli DAF, DBF per metà in L, H, conducasi per L, H (*n.* 13.) l' arco del circolo massimo che s' incontra col semicircolo ABE in qualche luogo in P, e saranno gli angoli DHL, DLH retti; (*n.* 26.) e perciò D sarà il polo del circolo LPH, (*n.* 24.) e LH (*n.* 22.) la misura dell' angolo ADB; e a motivo pure dell' angolo retto LAP, saranno (*n.* 24.) P il polo del circolo AL, PA, PL i quadranti, (*n.* 16.) AL la misura dell' angolo BPH. (*n.* 22.)

29 Tutta

29. Tutta la soluzione de' triangoli rettangoli nasce dalla considerazione della piramide, il cui vertice è C, e la base BIG; e dal paragone del triangolo sferico BAD rettangolo in A, con BHP rettangolo in H. Tutte le faccie della piramide sono triangoli rettangoli; imperciocchè gli angoli BIG, BIC sono retti a motivo di BI perpendicolare a tutto il piano GIC, l'angolo IGC a motivo della costruzione, BGC a motivo del numero superiore. Ma il lato BH del triangolo sferico PHB sarà il complemento della base DB del triangolo DAB: la base BP sarà il complemento del lato AB: il lato HP sarà il complemento dell' arco HL, che misura l'angolo BDA: l'angolo BPH, la cui misura è l'arco AL, sarà il complemento del lato AD: gli angoli B opposti al vertice saranno eguali. (*n.* 19.) Dalla considerazione della piramide, paragonando due faccie tra se e con la base, si ricaveranno tre canoni; e dal paragone de' triangoli DAB, BHP altri tre, coll'ajuto de' quali si risolveranno tutti i triangoli rettangoli. Mentre però se ne ricavano i primi tre Canoni, abbiasi avanti gli occhi il secondo lemma; (*n.* 3.) e mentre se ne ricavano gli altri tre, abbiasi avanti gli occhi ciò che si è detto nel paragone di ogni parte di que' triangoli.

30. A motivo degli angoli retti BGC, BIC, stanno BG, BI seni degli angoli BCI, BCG, o sia della base BD, e del lato BA al raggio BC, come a motivo dell' angolo retto BIG, sta BG a BI, come sta il raggio al seno dell' angolo rettilineo BGI, o sferico D, il quale si oppone al lato AB. Per la qual cosa

I. *Il raggio è al seno dell' angolo, come il seno della base al seno del lato opposto.*

A motivo degli angoli retti BGC, IGC, stanno BG, GI tangenti degli angoli BCG, ICG, o sia degli archi BD, AD al raggio CG; e a motivo dell' angolo retto BIG, stà BG a GI, come il raggio al seno dell' angolo GBI, o sia al coseno dell'angolo rettilineo G, ovvero sferico D, che è contiguo al lato AP. Per la qual cosa

II. *Il raggio è al coſeno dell' angolo, come la tangente della baſe alla tangente del lato contiguo.*

A motivo degli angoli retti CGI, CIB, ſtà IG ſeno dell'angolo ICG, o ſia dell'arco AD, e IB tangente dell'angolo ICB, o ſia dell'arco AB al raggio CI; e a motivo dell'angolo retto BIG ſtà GI ad IB, come il raggio alla tangente dell' angolo rettilineo BGI, ovvero ſferico D, a cui è contiguo DA, e ſi oppone AB. Per la qual coſa

III. *Il raggio ſtà alla tangente dell' angolo, come il ſeno del lato contiguo alla tangente dell' oppoſto.*

Dal Can. 1. Il raggio ſtà al ſeno dell'angolo P, o dell'arco AL, ovvero al coſeno del lato AD, come il ſeno BP, o ſia coſeno del lato AB al ſeno BH, ovvero coſeno della baſe BD. Per la qual coſa

IV. *Il raggio ſtà al coſeno di un lato, come il coſeno dell' altro lato al coſeno della baſe.*

Dallo ſteſſo 1. Canone. Il raggio ſtà al ſeno dell' angolo PBH, o ſia ABD, come il ſeno BP, o ſia coſeno del lato AB contiguo all'iſteſſo angolo, ſtà al ſeno PH, ovvero coſeno HL, ovvero dell' angolo D, che ſi oppone all'iſteſſo AB. Per la qual coſa

V. *Il raggio ſtà al ſeno dell' angolo contiguo, come il coſeno del lato al coſeno dell' angolo oppoſto.*

Dal Can. 3. Il raggio ſtà alla tangente dell' angolo B, come il ſeno BH, ovvero il coſeno della baſe BD alla tangente HP, o ſia cotangente dell' arco LH, ovvero dell'angolo D. Per la qual coſa

VI. *Il raggio ſtà alla tangente di un angolo, come il coſeno della baſe alla cotangente dell' altro.*

31. Prima d'inſegnare l'uſo di queſti Canoni, convien premetter due regole, colle quali ſi ſcoprirà di quale ſpecie eſſer debbano i lati e gli angoli ritrovati. Si chiamano della ſteſſa ſpecie quelli che inſieme oltrepaſsano i gradi novanta, oppure inſieme ad eſſi non arrivano: di ſpecie diverſa ſi chiamano quelli, uno de' quali non arriva a novanta gradi, e l'altro gli oltrepaſſa.

Rimanendo le coſe come prima, ſi conduca (fig. 148.)

148.) per il polo P, e punto D (*n.* 13.) l'arco del circolo massimo, che sarà (*n.* 24.) perpendicolare ad ADE; e tagliato il semicircolo ADE per metà in I, si conduca (*n.* 13.) l' arco BI, il quale sarà quadrante, poichè il polo del circolo ABE (*n.* 24.) è nel circolo ADE a se perpendicolare; e taglia quello (*n.* 16.) per metà, e pero è in I. (*n.* 16.) Si conduca pure l'arco Bd per qualunque punto d che giaccia rispetto ad I alle parti opposte D (*n.* 13.) e vi sia l' arco del Circolo massimo FIf che abbia il polo in B, e che s'incontri cogli archi BD, Bd in F, ed f, il quale a cagione di Bf quadrante (*n.* 16.) sarà circolo massimo, e taglierà BF, Bf quadranti, e formerà gli angoli retti BIF, BIf. (*n.* 24.)

32. Se il lato AB in minore del quadrante AP; l' angolo ADB sarà sempre minore del retto ADP, di cui sarà una parte. Se poi il lato sarà maggiore, anche l'angolo sarà maggiore, in qualunque modo stiasi l'altro lato AD. Per la qual cosa

Reg. 1. *I lati sono della stessa specie con gl'angoli opposti.*

Se il lato AB sia minore del quadrante AP, l'angolo AIB sarà minore per la regola 1. del retto, e però minore dell' angolo FIB; ma l' angolo BId sarà maggiore del retto BIf; e perciò la base BD sarà minore del quadrante BF, e Bd maggiore del quadrante Bf; quindi nelli triangoli BAD, BED, ove i lati sono della stessa specie, la base è minore del quadrante; ne' triangoli AdB, EdB, ove sono di specie diversa, è maggiore del quadrante. Perchè poi per la reg. 1. gli angoli sono della stessa specie con i lati opposti, possono sostituirsi in vece di quelli. Per la qual cosa

Reg. 2. *Se due lati, o due angoli, o un lato coll' angolo contiguo saranno della stessa specie, la base sarà minor del quadrante; se di specie diversa, sarà maggiore; e viceversa.*

33. Qualunque volta vien proposto da risolvere un triangolo rettangolo, de' due lati, due angoli, e la ba-

e, due cose si danno fuor dell'angolo retto, e si cerca la terza. Per ritrovarla è necessario primieramente ritrovare qualche sua funzione, cioè il seno, la tangente, il coseno, o la cotangente. In secondo luogo è necessario conoscere di quale specie debba essere; imperocchè i complementi al semicircolo hanno le funzioni comuni. La prima cosa sempre si rende manifesta per mezzo de' Canoni; l'altra per le regole, fuor del caso, in cui dia si il lato con l'angolo opposto; imperocchè allora il rimanente potrà essere minore o maggiore di novanta gradi. Così ne' triangoli BAD, BAF, il lato BA è comune, gli angoli in D ed F sono eguali (*n.* 23.), l'altro lato, la base, e l'altro angolo in uno sono complementi ai gradi 180. di quelli che sono nell'altro: e perciò questo caso in se è indeterminato ed ambiguo.

34. In sei Canoni ci sono tutte le combinazioni di quelle cinque parti dell'angolo che possono darsi e cercarsi oltre l'angolo retto, quando tre se ne prendono: e in qualunque modo se ne diano due di queste tre che sono nell'istesso Canone, si darà qualche funzione della terza: imperciocchè dei quattro termini proporzionali che si pongono in quel canone, uno sarà il raggio, due saranno le date funzioni, e l'altra sarà la funzione ricercata: e in qualunque proporzione, dati tre termini qualunque, appariſce anche l'altro. Imperocchè il prodotto degli estremi eguagliandosi al prodotto dei medj (16. *l.* 6.), se quel restante sarà estremo si avrà, dividendo il prodotto de' medj per l'altro estremo; e se sarà medio si avrà, dividendo il prodotto degli estremi per l'altro medio. La specie poi facilmente si farà palese coll'altra regola.

35. Porremo quì con ordine le combinazioni, e a ciascuna apporremo il canone al quale appartiene, e la regola.

1. La base con amendue i lati. Can. 4. Reg. 2. part. 1.

2. La base con amendue gli angoli. Can. 6. Reg. 2. part. 2.

3. La

3. La baſe col lato e angolo contiguo. Can. 2. Reg. 2. part. 3.

4. La baſe col lato e angolo oppoſto. Can. 1. Reg. o neſſuna in caſo ambiguo.

5. Amendue i lati con un angolo. Can. 3. Reg. 1. o neſſuna in caſo ambiguo.

6. Amendue gli angoli con un lato. Can. 5. Reg. 1. o neſſuna in caſo ambiguo.

36. Diaſi e.gr. la baſe (gr. 57. 25.) col lato (gr. 41. 16.) e cerchiſi l'angolo, contiguo al lato. Le tre coſe che qui ſi combinano, ſono la baſe col lato e l'angolo contiguo. A queſta combinazione, che è la terza, corriſponde il Canone 2. reg. 2. part. 3. Dal Canone 2. ſi ha, che *il raggio è al coſeno dell'angolo, come la tangente della baſe alla tangente del lato contiguo*. Si dà il primo termine (10000000) il terzo (15646590) il quarto (8774912). Dunque ne ricaverai il ſecondo, cioè il coſeno dell'angolo

$$\left(\frac{8774912 \times 10000000}{15646590} = 5608194 \right)$$

, che è il ſeno di gr. 34. 6.′ 49.″, coſen. grad. 55. 53.′ 11.″, ovvero gr. 124. 6.′ 49.″). Dalla ſeconda parte reg. 2. avrai invertendo, che ſe la baſa ſarà minor del quadrante (come è quì) il lato, e l'angolo contiguo ſaranno della ſteſſa ſpecie; ſe maggiore, di ſpecie diverſa. Hai già conoſciuta la ſpecie della baſe e del lato (quì cioè minor del quadrante). Dunque ritroverai anche la ſpecie dell'angolo (quì cioè acuto). Dunque anche l'angolo (gr. 55. 53.′ 11.″). Opera all'iſteſſo modo negli altri.

37. Ogni combinazione contiene tre problemi, perchè cioè qualſivoglia di queſte tre coſe ſi può cercare, date le altre due. Per la qual coſa tutti inſieme ſarebbero dieciotto. Ma nella prima e nella ſeconda ſono ſolamente due diverſi. Imperciocchè quando data la baſe e il lato, o l'angolo ſi cerca l'altro lato o l'altro angolo, ſarà l'iſteſſo il problema, qualunque de' lati e degli angoli ſi dia, per ritrovare da quello

l'altro. Quindi que' problemi ſi riducono a ſedici, ne' quali ſi racchiude ogni riſoluzione de' triangoli rettangoli. Nelle ultime tre combinazioni ſi contengono tre problemi indeterminati circa la ſpecie della parte ricercata; quando cioè dato il lato, e l' angolo oppoſto, ſi cerca la baſe, o l'altro lato, o l'altro angolo, ne' quali caſi reſtiamo abbandonati da quelle regole, le quali per altro abbracciano gli altri caſi tutti, che ſono in ſe determinati.

PARTE SECONDA.

Degli obliquangoli.

38. GLi obliquangoli si riducono ai rettangoli coll' ajuto di una perpendicolare calata (*n.* 13.) sopra uno de' lati considerato come base. Contiene sei Casi; potendosi cercare il rimanente, primo dati due lati con un angolo intercetto. 2. con un angolo opposto ad uno de' due lati. 3. dati due angoli con un lato intercetto. 4. con un lato ad uno de' due angoli opposto. 5. dati tre lati. 6. dati tre angoli.

39. Il primo e il terzo caso saranno sempre possibili e determinati, purche ogni lato ed angolo dato non oltrepassi i gradi 180. Imperciocchè fatto a piacere l' angolo A (fig. 149.), e presi a piacere i lati AD, AB, si potrà per B, e D condurre (*n.* 13.) un circolo massimo, il quale è determinato dal piano che passa per B, D, e pel centro della sfera. Preso poi a piacere il lato AD, e fatti parimenti a piacere gli angoli A, D, si incontreranno in qualche luogo i semicircoli A Ba, DBd nell' unico punto B, dovendosi tutti i circoli tagliare vicendevolmente (*n.* 12.) in due punti diametralmente opposti, e dovendo perciò una intersezione rimanere nell' opposto emisfero.

40. Il secondo e quarto caso possono avere o due soluzioni, o una, o nessuna. Imperciocchè si concepisca compirsi il circolo del lato AD del triangolo ABD, e rimanendo l' angolo A col lato AB, sia il semicircolo EBe perpendicolare al circolo ADa, il quale continuamente percorso sia dal punto D, variato il lato BD, e l' angolo D, e i semicircoli EAe, Eae si taglino per metà in i e in I.

41. Per il Canone 4. il raggio sta al coseno EB, come il coseno ED al coseno BD. Quindi rimanendo

il

il raggio e il coſeno BE ſarà il coſeno BD, come il coſeno ED. Il coſeno ED è maſſimo, paſſando il punto D in E, ove ſi eguaglia al raggio, e ſvaniſce ED: ſi ſminuiſce da qualunque parte fino ad I ed i, ove diventa nullo; non eſſendovi cioè complemento del quadrante EI, ed Ei. Allora divien negativo, e creſce fino ad e, ove di nuovo eguagliaſi al raggio. Per la qual coſa il coſeno BD, e il ſuo complemento BD ſaranno maſſimi in E, ed in e: e da E fino ad I, i ſi ſminuiranno, ove diverran nulli: dipoi creſceranno fino ad e, ed in eguali diſtanze dal punto E ovvero e, ſaranno della medeſima grandezza.

42. Per il Canone 3. il raggio è alla tangente dell' angolo D, come il ſeno ED alla tangente BE. Dunque dati il raggio e la tangente BE, ſarà la tangente dell' angolo D in ragione inverſa del ſeno ED. Per la qual coſa gli Angoli in D, i quali paſſando il punto D in F, ſono per ogni parte retti, da E in I ovvero i ſi variano in modo, che l'acuto decreſca, l' ottuſo creſca, ſminuendoſi la tangente, e però anche la loro ſemidifferenza; la quale ſiccome ſi ottiene (*n.* 3.) togliendo la minore dalla ſemiſomma o ſia dal quadrante, ovvero togliendo il quadrante dalla maggiore; è complemento dell'uno e dell'altro, e creſce fino ad I ovvero i; ove ED divien quadrante; e però D diventa polo del circolo EBe, (*n.* 16.) e gli angoli ſteſſi vengono miſurati dagli archi FB, Be; (*n.* 22.) di poi accreſciuta di nuovo la tangente, decreſce il complemento, che in e divien nullo, ove gli ſteſſi angoli di nuovo divengon retti.

43. Quindi ſe nel ſecondo caſo il complemento del lato BD, oppoſto all'angolo dato A; e nel quarto caſo il complemento dell'angolo D oppoſto al lato dato AB, ſarà maggiore del complemento BE, il qual arco dai dati AB, ed A ſi dà per la combinazione prima, allora il caſo ſarà impoſſibile. Se ſarà minore del complemento EB ma ancora maggiore del complemento, ivi del lato AB contiguo al dato angolo, quì dell'

an-

angolo A contiguo al dato lato; allora la soluzione sarà doppia, ivi circa E, quì circa I, ovvero nulla, secondo che sarà della stessa specie ivi il lato BD col lato AB, quì l'angolo D coll'angolo A, ovvero di specie diversa. Negli altri casi sarà unica, e unica sarà parimenti, se il punto D passi ivi in E, e il lato dato BD si eguagli a BE, quì in I, e l'arco BE misuri l'angolo D. Queste cose per altro più facilmente fian manifeste dalla stessa soluzione; e quando occorrerà doppia soluzione, converrà pria conoscere la specie dell'altro angolo nel secondo caso, o la specie dell'altro lato nel quarto caso, e allora si potrà determinare il problema.

44. Gli ultimi due casi sempre saranno determinati, come fia manifesto dalla stessa soluzione; e se involgeranno impossibilità, si conoscerà, come negli altri casi, da questo, che il seno, o il coseno di qualche arco diverrà maggiore del raggio.

45. Si consideri qualsivoglia lato AD come la base, sulla quale cada l'arco perpendicolare BE, prodotta la base o entro il triangolo, o fuori di esso. Dicansi AE, DE segmenti della base, il primo contiguo al lato AB e all'angolo A, e opposto al lato BD, e all'angolo D; il secondo contiguo al lato BD, e all'angolo D, e opposto al lato AB, e all'angolo A; e quello si consideri come positivo quando cade verso D, come negativo, quando cadendo il punto E oltre A, passa alle parti opposte: questo poi si consideri positivo verso A, e negativo alla parte opposta. Gli angoli ABE, DBE si chiamino segmenti del vertice: il primo contiguo al lato AB, al segmento della base AE, e all'angolo D, opposto al lato BD, al segmento della base BE e all'angolo D: viceversa il secondo, e nell'istesso modo si considerino il positivo e il negativo.

46. Da primi sei Canoni ne dedurremo altri sette, coll'ajuto de'quali, e della terza regola didotta dalla prima, scioglieremo tutti i casi degli obliquangoli trian-

triangoli . Applicaremo cioè i Canoni e le regole già esposte ai triangoli rettangoli AEB , DEB; e ciò che si dirà delle lettere maggiori , s' intenda ancora delle minori.

47. Per il Canone 1. il raggio è al seno dell'angolo A, come il seno AB al seno BE, e il raggio è al seno dell'angolo D, come il seno BD al seno BE . Dunque il seno dell'angolo A è al seno D, come il seno BD al seno AB. Per la qual cosa

VII. *I seni degli angoli sono come i seni de' lati opposti.*

Per il Canone 2. Il raggio è al coseno dell'angolo ABE; come la tangente AB alla tangente BE, e il raggio al coseno dell'angolo DBE, come la tangente BD alla tangente BE. Dunque il coseno dell'angolo ABE al coseno DBE, come la tangente DB alla tangente BA. Per la qual cosa

VIII. *I coseni de' segmenti del vertice sono come le tangenti de' lati opposti.*

48. Per il Canone 3. Il raggio alla tangente dell'angolo A , come il seno AE alla tangente BE; e il raggio è alla tangente dell'angolo D, come il seno DE alla tangente BE. Dunque la tangente dell'angolo A alla tangente D sta come il seno DE al seno AE , Per la qual cosa

IX. *I seni de' segmenti della base , sono come le tangenti degli angoli opposti.*

Per il Canone 4. Il raggio è al coseno BE , come il coseno AE al coseno AB, e come il coseno DE al coseno DB. Dunque alternando il coseno AE al coseno DE, è come il coseno AB al coseno DB. Per la qual cosa

X. *I coseni de' segmenti della base sono come i coseni de' lati contigui.*

Per il Canone 5. Alternando il raggio è al coseno BE, come il seno ABE al coseno A, e come il seno DBE al coseno D. Dunque alternando, il seno ABE al seno DBE, come il coseno A al coseno D. Per la qual cosa

XI.

XI. *I ſeni de' ſegmenti del vertice ſono come il coſeno degli angoli contigui.*

Coll' ajuto di queſti cinque Canoni da ſegmenti dati; ovvero da ſe vicendevolmente ſi ritroveranno i lati, o gli angoli; come più ſotto fia manifeſto. Quindi ſi combinano.

7. I lati e gli angoli fra di ſe Can. 7.
8. I lati e i ſegmenti del vertice Can. 8.
9. I lati e i ſegmenti della baſe Can. 10.
10. Gli angoli e i ſegmenti del vertice Can. 11.
11. Gli angoli e i ſegmenti della baſe Can. 9.

49. Gli ſteſſi ſegmenti facilmente ſi ritroveranno ne' primi quattro caſi col mezzo de' primi ſei Canoni, come or ora apparirà. I due ultimi ſi ritroveranno per i due ſeguenti, che ſi ricavano dal Canone 10. e 11. e dal terzo Lemma premeſſo.

50. Per il Canone 10. prendendo le ſomme e le differenze de' termini ſarà la ſomma de' coſeni de' ſegmenti della baſe alla differenza, come la ſomma de' coſeni de' lati alla differenza. Per la qual coſa (*n.* 7.)

XII. *La cotangente della ſemiſomma de' ſegmenti della baſe, o ſia la cotangente della metà della baſe alla tangente della ſemidifferenza ſta come la cotangente della ſemiſomma de' lati alla tangente della ſemidifferenza.*

Per il Canone 11. Parimenti la ſomma de' ſeni de' ſegmenti del vertice è alla differenza, come la ſomma de' coſeni degli angoli alla differenza. Per la qual coſa (*n.* 7.)

XIII. *La tangente della ſemiſomma de' ſegmenti del vertice, o ſia la tangente della metà dell' angolo verticale alla tangente della ſemidifferenza ſta come la cotangente della ſemiſomma degli angoli alla baſe ſta alla tangente della ſemidifferenza.*

51. Nepero in vece del Canone 12. propone queſto: *La tangente della metà della baſe ſta alla tangente della ſemiſomma de' lati, come la tangente della*

della ſemidifferenza degli ſteſſi ſta alla tangente della ſemidifferenza de' ſegmenti della baſe: e lo dimoſtra co' principj Conici. Si deduce dal Canone 12. primo alternando, dipoi ponendo per la ragione della cotangente della metà della baſe alla cotangente della ſemiſomma de' lati, la ragione della tangente di queſta alla tangente di quella. Imperciocchè (*n.* 5.) il prodotto ſotto la tangente e cotangente di ciaſcun arco eſſendo eguale al quadrato del raggio, ſaranno le tangenti in ragione inverſa delle cotangenti. Ma per la pratica vale egualmente queſto noſtro Canone che immediatamente ſe ne deduce.

52. Per la regola prima, tanto l' angolo BAE, quanto l' angolo BDE ſono della ſteſſa ſpecie che l' arco BE. Dunque ſe gli angoli BAD, BDA ſaranno della ſteſſa ſpecie, giacerà il punto E entro la baſe AD, combaciandoſi gli angoli BDA, BDE; ſe ſaranno di ſpecie diverſa, cadrà fuori. Per la qual coſa

Reg. III. *Se due angoli alla baſe ſaranno della ſteſſa ſpecie, la perpendicolare cadrà entro la baſe; ſe ſaranno di ſpecie diverſa, cadrà fuori di eſſa.*

53. Caſo I. Si diano i lati AB, AD con l' angolo intercetto A. Due coſe ſi poſſono cercare. Primieramente ſi cerchi il terzo lato BD. Forma la baſe di due lati a piacere, come per eſempio AD. Dai dati AB, ed A cerca AE per la combinazione terza: avrai ED per il dato AD. Coi ſegmenti AE, ED, e col lato AB ritroverai il coſeno BD per la nona combinazione del Canone decimo. Dal dato A hai la ſpecie B per la regola prima. Da eſſa, e dalla ſpecie ED hai la ſpecie BD per la regola ſeconda.

Si cerchi in ſecondo luogo l' altro angolo D. Poni per baſe il lato dato ad eſſa contiguo AD. Cerca i ſegmenti AE, ED, come prima: con eſſi, e coll'angolo A per la undecima combinazione Canone 9. ritroverai la tangente D. Se AE ſarà oltrepaſſato da AD, la ſpecie D ſarà la medeſima che A; ſe oltrepaſſerà, ſarà diverſa per la regola terza.

54. Ca-

54. Caso II. Si diano i lati AB, BD, con l'angolo A opposto all'altro, come BD. Tre cose si possono ricercare.

Primieramente si cerchi il lato AD. Fa di esso la base: ritroverai AE, e la specie BE, come nel primo caso: dipoi coi dati lati AB, BD, e col segmento AE ritroverai per la combinazione nona, Can. 10. il coseno ED. Colla specie BE, e BD ritroverai la sua specie per la regola seconda. Ma poichè alcune volte si potrà avere doppia soluzione da ambe le parti di E leva ED da EA, e avrai la prima; aggiungi, e avrai la seconda. Se a caso AD per la sottrazione sarà divenuta negativa a motivo di AE minore della stessa ED, ovvero per l'addizione avrà oltrepassato il semicircolo, allora rigetta quella soluzione.

Si cerchi in secondo luogo l'angolo ABD intercetto. Dai dati AB, ed A] cerca il segmento del vertice ABE per la combinazione seconda. Coi lati AB, BD, e col segmento del vertice ABE ritroverai per la combinazione 8. Canone 8. il coseno EBD. Col dato EB, e ritrovata la specie BE, come prima, ritroverai la specie DBE per la regola seconda. Leva EBD dall'istesso EBA, e avrai la prima soluzione; aggiungi, e avrai la seconda. Se l'angolo ABD per la sottrazione diverrà negativo, o per l'addizione maggior di due retti, rigetta quella soluzione.

Si cerchi in terzo luogo l'angolo D opposto al lato AB. Coi lati AB, BD, e coll'angolo A ritroverai per la combinazione 7. Canone 7. il seno D. La specie nella seconda solutione sarà la stessa che A, nella prima sarà diversa per la regola terza.

55. Caso III. Si diano gli angoli A, e B col lato intercetto AB. Due cose si possono ricercare. Primieramente si cerchi qualsivoglia lato BD. Poni l'altro AD per base. Cerca l'angolo ABE, come nella seconda parte del primo caso. Avrai EBD per il dato ABD. Con questi dati, e col lato AB ritroverai per la combinazione 8. Can. 8. la tangente BD. Dalla spe-

cia

cie A avrai la ſpecie BE per la regola prima. Da eſſa, e dalla ſpecie EBD avrai la ſpecie BD per la regola ſeconda.

Si cerchi in ſecondo luogo l'angolo D. Prendi per baſe qualunque de' lati già dati, come AD. Cerca i ſegmenti del vertice, come prima. Da eſſi e dall' angolo A ritroverai per la combinazione 10. Can. 11. il coſeno D. Queſto ſarà della ſteſſa ſpecie con A, ſe ABE ſarà minore di ABD; ſarà di ſpecie diverſa, ſe ſarà maggiore, per la regola terza.

56. Caſo IV. Si diano gli angoli A, e D col lato AB oppoſto all'altro, come D. Tre coſe ſi poſſono cercare.

Primieramente ſi cerchi il lato AD intercetto. Fa di eſſo la baſe. Dai dati AB, ed A cerca AB per la terza combinazione. Dagli Angoli A, D, ed AE ſegmento della baſe, ritroverai per la combinazione prima Canone 9. il ſeno ED. La ſpecie ſarà indeterminata, e potrà eſſere doppia la ſoluzione circa I, preſa qualſivoglia ſua ſpecie. Aggiungi all' iſteſſo AE l' uno e l' altro ED, e gli angoli A, e D ſaranno della ſteſſa ſpecie; levali ſe ſaranno di ſpecie diverſa per la regola terza, e avrai l'una e l' altra ſoluzione. Se AE in forza della ſottrazione diverrà negativa, o in forza dell'addizione diverrà maggiore del ſemicircolo, rigetta quella ſoluzione.

Si cerchi in ſecondo luogo il terzo angolo ABD. Coi dati AB, ed A cerca ABE per la combinazione ſeconda. Dagli angoli A, D, ed ABE ſegmento del vertice ritroverai per la combinazione 10. Canone 11. il ſeno EBD. Sarà parimenti EBD di ambigna ſpecie; e l' uno e l' altro dovrà aggiungerſi all' iſteſſo ABE, ſe gli angoli A, e D ſaranno dell' iſteſſa ſpecie; dovrà levarſi ſe ſaranno di ſpecie diverſa, per la regola 3. Se l'angolo ABD per la ſottrazione diverrà negativo, o per l'addizione maggior di due retti, rigetta quella ſoluzione.

Si cerchi in terzo luogo il lato BD. Dagli angoli dati A, D, e dal lato AB ritroverai il ſeno BD per

la combinazione 7. Can. 7. Esso arco sarà di spezie ambigua. Se inoltre si darà la sua specie, con essa, e colla specie BE già tante volte ritrovata, determinerai la specie ED, ed EBD per la regola seconda.

57. Caso V. Si diano tre lati, e si cerchi qualsivoglia angolo, come A. Poni per base l' altro de' lati a se contigui, come AD. Coi dati AB, BD, e colla metà della base AD ritroverai per il Can. 12. la tangente della semidifferenza de' segmenti AE, ED, la quale assumerai non maggiore del quadrante. Aggiungi quella alla metà della base AD, e fatta la sottrazione, ritroverai i segmenti AE, ED. (*n.* 3.) Prendi in vece di AE contiguo all' istesso AB, il segmento che più o meno è lontano dal quadrante, secondo che il lato contiguo AB sarà più o meno lontano che non l'opposto BD. Imperciocchè per il Can. 10. *I coseni de' segmenti della base sono, come i coseni de' lati contigui*; e il coseno dell' arco più vicino al quadrante, è minore. Da AB, ed AE ritroverai l'angolo A per la combinazione terza. Ma se AE risulterà dalla sottrazione, e diverrà negativo cadendo il punto E dentro A, l'angolo BAD giacerà alle parti opposte all' angolo BAE, e perciò sarà di specie diversa.

58. Caso VI. Si diano tre angoli, e si cerchi qualsivoglia lato, come AB. Poni per base uno degli altri, come AD. Coi dati A, e D, e colla metà ABD ritroverai per il Can. 13. la tangente della semidifferenza de' segmenti ABE, DBE, la quale assumerai non maggiore del quadrante. Aggiungi questa alla metà dell'angolo ABE, e fatta la sottrazione, ritroverai i segmenti del vertice ABE, DBE (*n.* 3.). Prendi invece di ABE contiguo all' istesso A, il segmento, che più o meno sia lontano dall'angolo retto, secondo che per il contrario l' Angolo A contiguo più o meno sarà lontano dall'istesso che non l'opposto D. Imperciocchè per il Can. 11. *I seni de' segmenti del vertice sono, come i coseni degli angoli contigui*; ed è maggiore il seno, e minore il coseno dell'arco più vicino

cino al quadrante. Cogli angoli A, ed ABE ritroverai il lato AB per la combinazione seconda. Ma se ABE risulterà per la sottrazione, e diverrà negativo, cadendo il punto E dentro A, l'angolo BAE, dal qual e da ABE si stima la specie AB, giacerà alle parti opposte, e sarà di specie diversa dal dato BAD.

59. Se nel quinto caso avuta la tangente della semidifferenza de' segmenti della base, fosse stato preso l'arco maggior del quadrante, l'istessa soluzione sarebbesi avuta. Infatti sia l'arco AD tagliato per metà in L, cosicchè siano (*n.* 2.) AL, LD le semisomme, LE la semidifferenza, AE il segmento fatto per l'addizione della semisomma e della semidifferenza, DE il segmento fatto per la sottrazione. Se invece di LE fosse stato preso l'arco LAe; il segmento fatto per l'addizione sarebbe stato DLAe (ovvero De, giacchè supera il semicircolo), per la sottrazione Ae negativo, e perciò cadente da A verso d. Essendo poi l'istesso il suo complemento, che AE, esso sarebbe stato contiguo all'angolo A, e in vece del triangolo BAE sarebbe stato da risolvere il triangolo BAe, e l'angolo BAD sempre l'istesso sarebbe risultato, per le funzioni comuni degli archi AE, Ae. Giova però prendere per semidifferenza l'arco non maggior del quadrante; sì perchè senza nuova sottrazione immediatamente s'incontra nelle tavole; sì perchè in questo modo non si oltrepassa il semicircolo nell'addizione, a motivo di AD minore del semicircolo, e quindi di AL, DL minori del quadrante. L'istesso accade nel caso sesto. Però resta chiaro, che l'uno e l'altro è determinato, e ammette una sola soluzione.

60. Se nel triangolo ABD, o i due lati AB, BD, o i due angoli A, D si eguagliassero, diverrebbe più breve la soluzione, prendendo per base il lato AD intercetto da lati o angoli eguali. Imperciocchè la perpendicolare BE dividerà per metà e l'istessa base, e l'angolo opposto alla base. Infatti ne' triangoli ABE, DBE dalla data base AB, e dal lato BE provenendo nel Can. 4. l'istesso Coseno del lato AE, e dal Can. 2. il

2. il Coſeno dell' angolo ABE ; e dalle baſe eguale BD , e dall' iſteſſo lato BE il Coſeno del lato BEe dell'angolo DBE; e a motivo della ſteſſa ſpecie delle baſi BD, BA, e del lato BE, eſſendo per la reg. 3. iſteſſa la loro ſpecie; ſarà ſempre AE eguale ad ED, e l'angolo ABE eguale all' angolo DBE ; e ſimile è la dimoſtrazione per il caſo degli angoli eguali A, D. Quindi poi nel triangolo rettangolo AEB, oltre il lato AB, o l'angolo A , ſi renderà paleſe il ſegmento AE, ovvero ABE, ſecondo che ſarà data la baſe AD, ovvero l'angolo ABD.

61. Se diaſi ſolamente un lato eguale al quadrante, come AB, preſo AE quadrante, ſi conduca per E e B l'arco EB; (*n.* 13.) e gli angoli ABE, AEB ſaranno retti, (*n.* 26.) e il lato BE ſarà miſura dell'angolo A ; (*n.* 22.) e perciò l'arco ED , e l' angolo EBD ſaranno complementi del lato AE, e dell'angolo ABD. Date dunque le parti del triangolo ABD , ſi danno le parti del triangolo rettangolo BED , e ſciolto queſto, ſi riſolve anche quello.

62. Tutti queſti Canoni , e tutta la pratica ſono abbaſtanza atti per adoperare i logaritmi , sì perchè non ſi adopera mai la ſomma o la differenza de' ſeni o coſeni , che non ſi ha immediatamente per mezzo de' logaritmi; sì perchè ſi ſono tralaſciate le ſecanti , i cui logaritmi in molte tavole non ſi trovano, appunto perchè facilmente ſi ricavano da logaritmi de' coſeni, e non mai occorre l'uſo de'ſeni-verſi, i quali più difficilmente ſi ricavano dalle tavole . Queſto metodo poi ſembra migliore d'altri molti , sì per la brevità , e per un certo ordine, e connеſſione di dimoſtrazioni; non eſſendovi meſtieri della dottrina delle ſezioni coniche , nè di una certa moleſta trasformazione di un triangolo di angoli dati in un triangolo di lati dati, e gli altri teoremi ſpontaneamente derivano da altri; sì perchè ſubito ſi rende chiaro per regole ſpeditiſſime, ogni qual volta la ſpecie della parte cercata , è determinata in ſe ſteſſa.

63. Ac-

63. Acciocchè poi in una sola occhiata si veggano tutte le cose che appartengono all' uso, porremo qui sotto i Canoni con le combinazioni, e le regole.

Per i Triangoli rettangoli.

I. *Il raggio è al seno dell' angolo, come il seno della base al seno del lato opposto.*

II. *Il raggio è al coseno dell' angolo, come la tangente della base alla tangente del lato contiguo.*

III. *Il raggio è alla tangente dell' angolo, come il seno del lato contiguo alla tangente dell' opposto.*

IV. *Il raggio è al coseno di un lato, come il coseno di un altro al coseno della base.*

V. *Il raggio è al seno dell' angolo contiguo, come il coseno del lato al coseno dell' angolo opposto.*

VI. *Il raggio è alla tangente di un angolo, come il coseno della base alla cotangente dell' altro.*

Reg. I. *I lati sono della stessa specie con gli angoli opposti.*

Reg. II. *Se due lati, o due angoli, o un lato con l' angolo contiguo saranno della stessa specie; la base sarà minore del quadrante; se di specie diversa, sarà maggiore; e viceversa.*

Combinaz. 1. La base con amendue i lati	Can. 4. reg. 2. part. 1.
2. La base con amendue gli angoli	Can. 6. reg. 2. part. 2.
3. la base col lato e l'angolo contiguo	Can. 2. reg. 2. part. 3.
4. La base col lato e l'angolo opposto 5. Amendue i lati con un angolo 6. Amendue gli angoli con un lato	Reg. 1. ovvero nessuna in caso ambiguo.

Per

Per gli Obliquangoli.

VII. *I ſeni degli angoli ſono come i ſeni de' lati oppoſti.*

VIII. *I coſeni de' ſegmenti del vertice ſono come le tangenti de' lati oppoſti.*

IX. *I ſeni de' ſegmenti della baſe ſono come le tangenti degli angoli oppoſti.*

X. *I coſeni de' ſegmenti della baſe ſono come i coſeni de' lati contigui.*

XI. *I ſeni de' ſegmenti del vertice ſono come i coſeni degli angoli contigui.*

XII. *Se due angoli ſaranno della ſteſſa ſpecie colla baſe, la perpendicolare cadrà entro la baſe; ſe di ſpecie diverſa cadrà fuori d' eſſa.*

Combinaz. 7.	I lati e gli angoli	Can. 7.
8.	I lati e i ſegmenti del vertice	Can. 8.
9.	I lati e i ſegmenti della baſe	Can. 10.
10.	Gli angoli e i ſegmenti del vertice	Can. 11.
11.	Gli angoli e i ſegmenti della baſe	Can. 9.

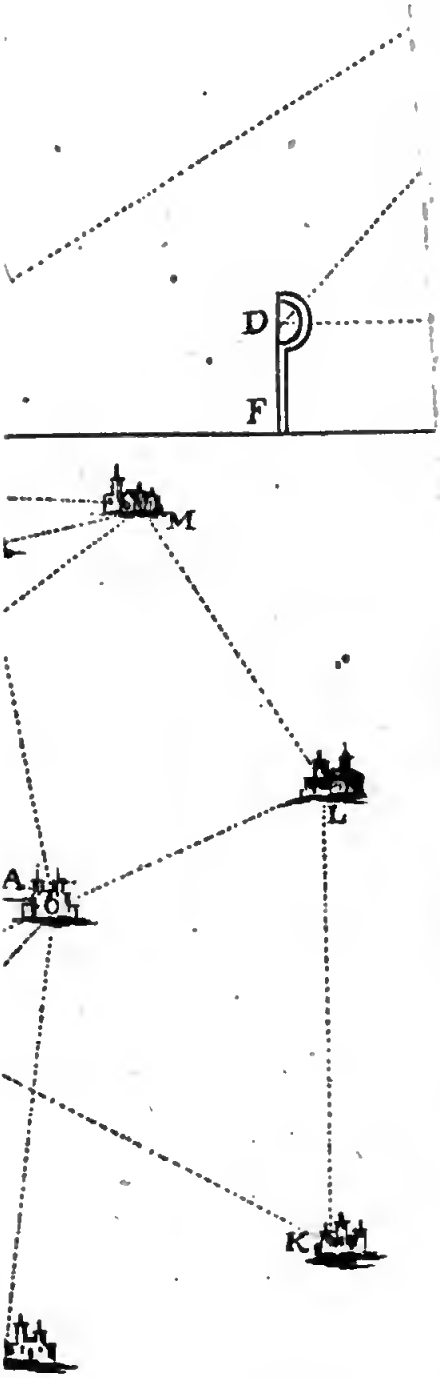
Per ritrovare i ſegmenti in caſo dei lati, e degli angoli già dati.

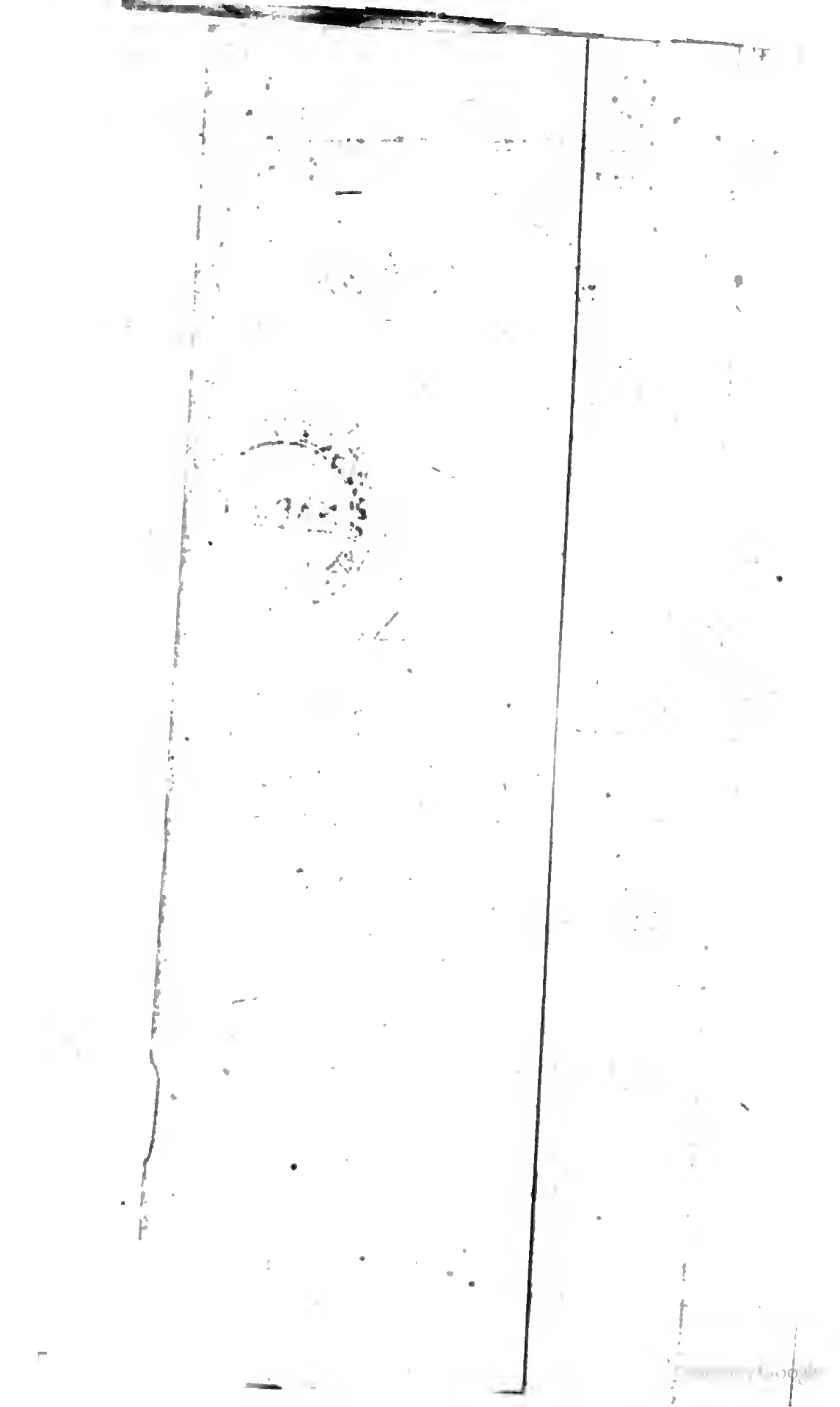
XII. *La cotangente della metà della baſe ſtà alla tangente della ſemidifferenza de' ſegmenti, come la cotangente della ſemiſomma de' lati alla tangente della ſemidifferenza.*

XIII. *La tangente della metà dell' angolo verticale ſtà alla tangente della ſemidifferenza de' ſegmenti, come la cotangente della ſemiſomma degli angoli alla baſe ſtà alla tangente della ſemidifferenza.*

FINE.

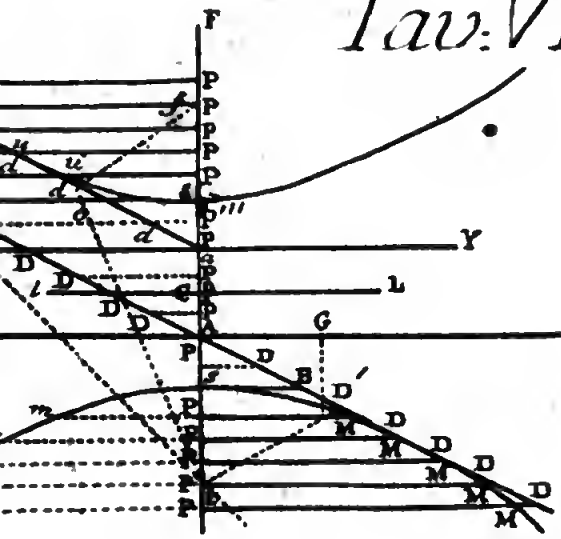
609250


D
F
M
L
A
K

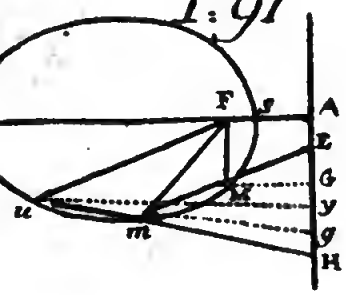


F. 89

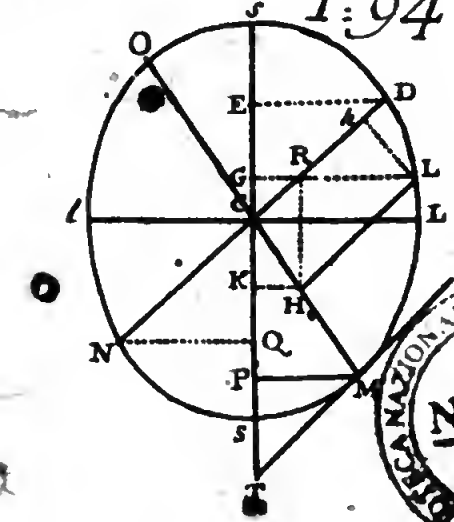
Tav: VII



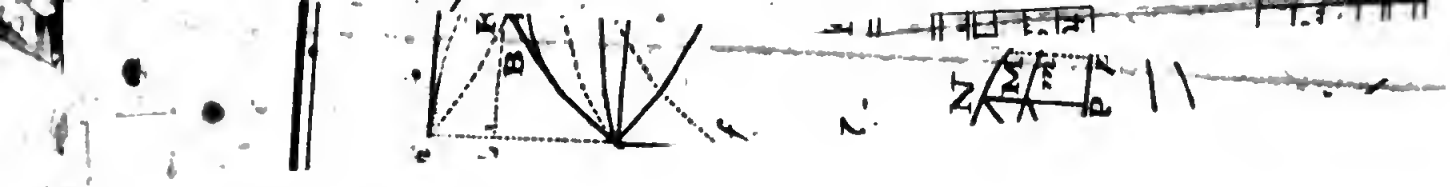
F. 91

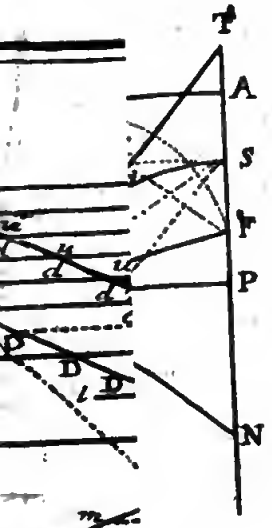


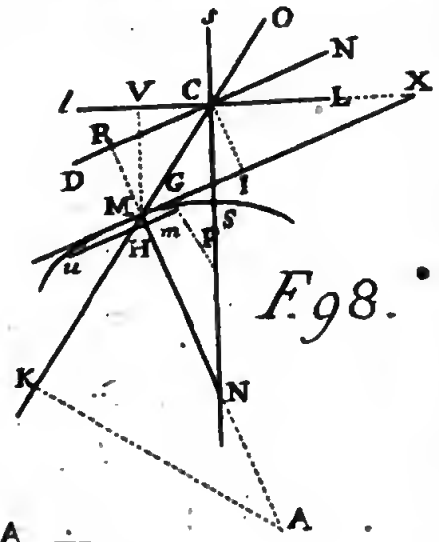
F. 94



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI

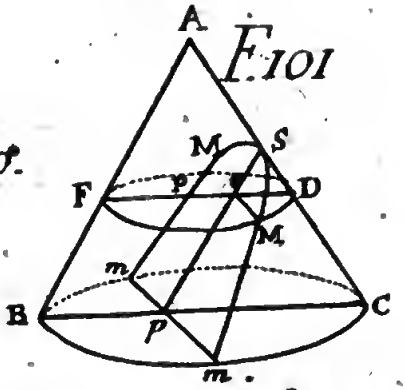






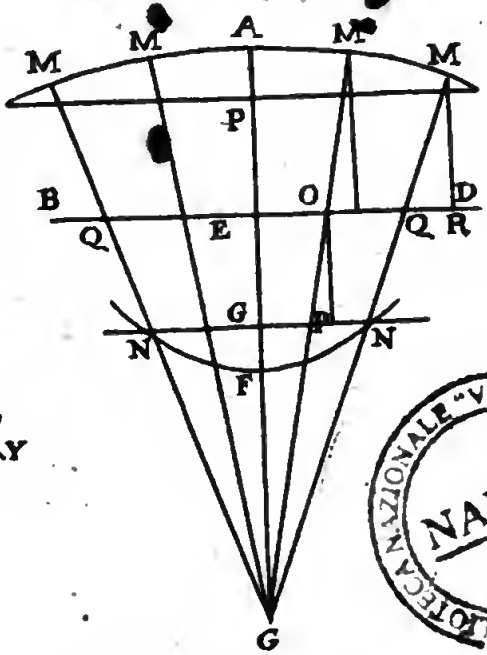
F. 98.

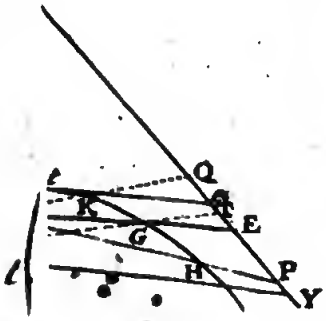
F. 101



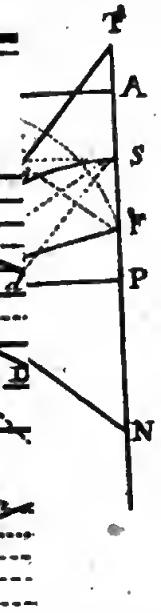
F. 100.

F. 105





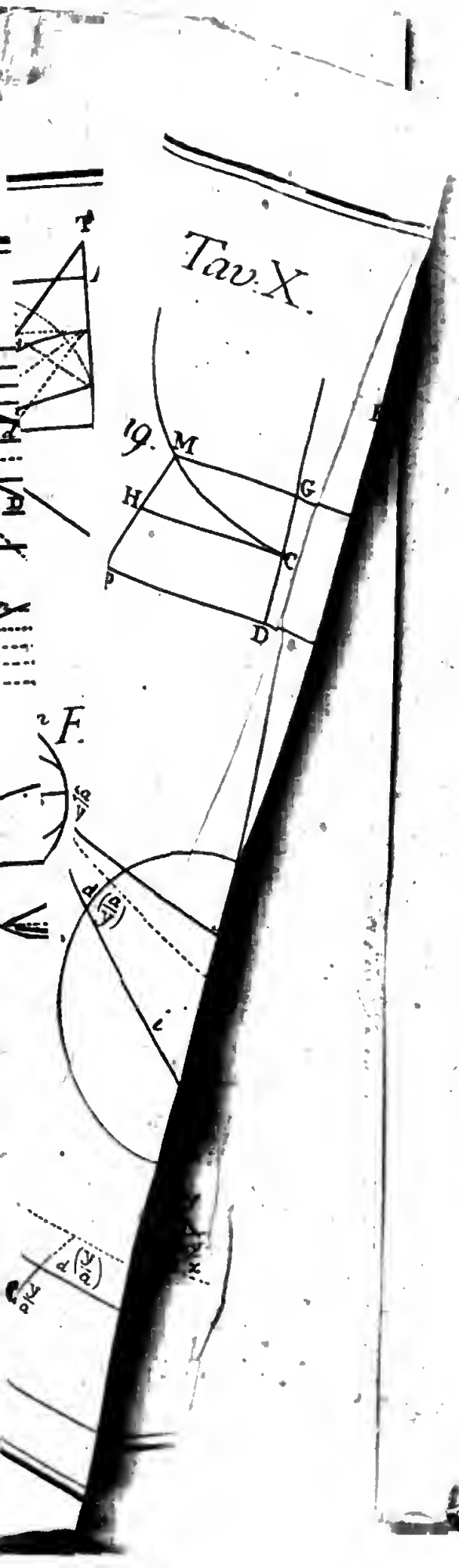
BIBLIOTECA NAZIONALE VITT
NAP

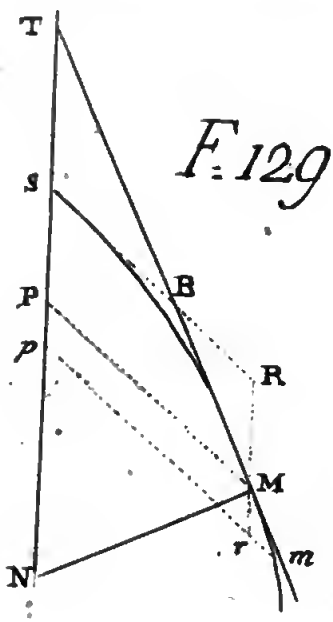


F. 100.

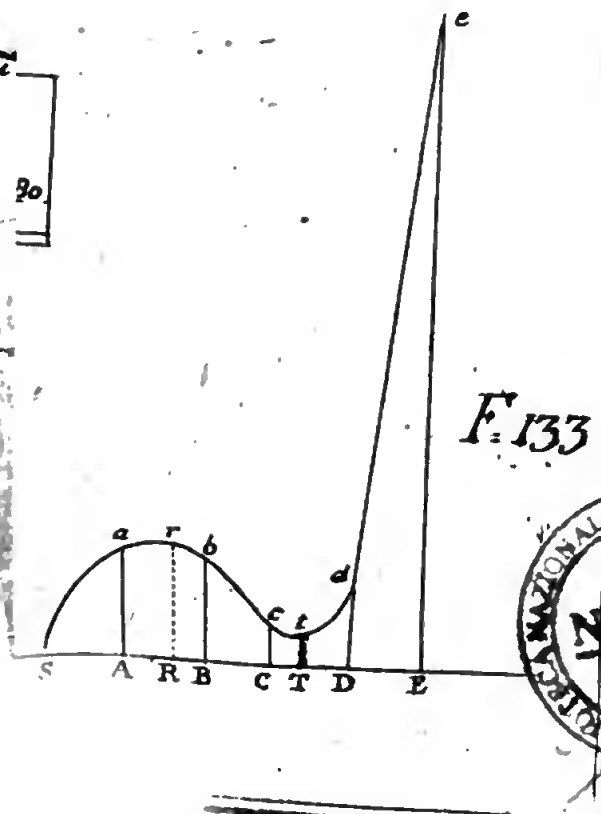
B

1


Tav. X.
19.
M
H
G
C
D
F.

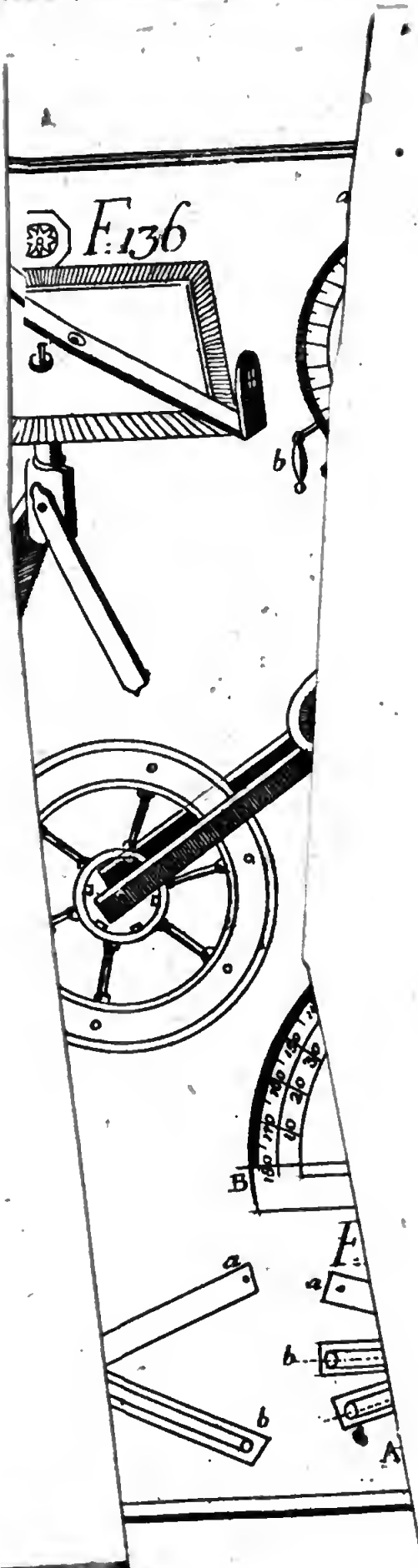


F. 129



F. 133

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
NAPOLI


F. 136
b
b
B
a
b
b
A